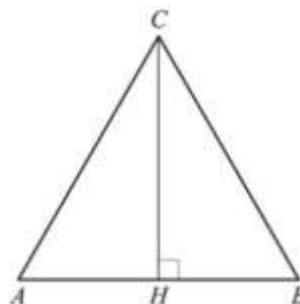


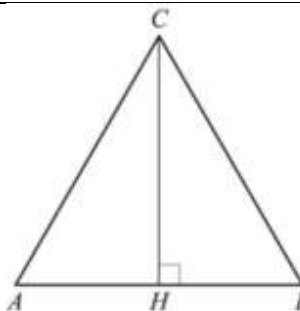
Равносторонний и произвольный треугольники

■ Примеры

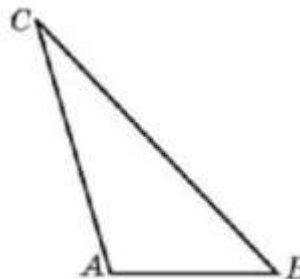
- №1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$.
Найдите высоту CH .



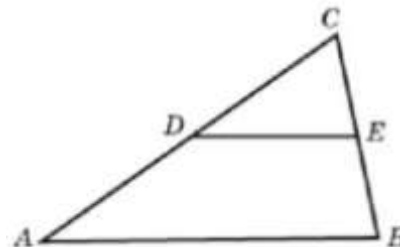
- №2. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите AB .



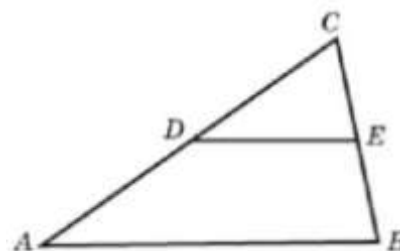
- №3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .



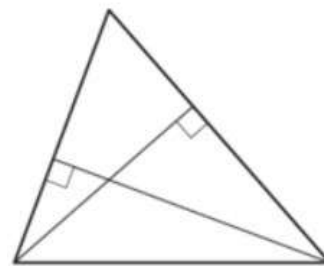
- №4. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



- №5. Площадь треугольника ABC равна 10. DE — средняя линия, параллельная AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

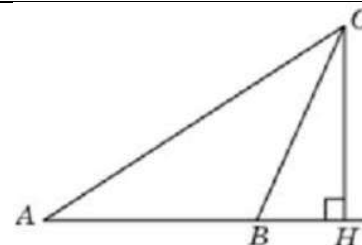


- №6. В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 4. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.

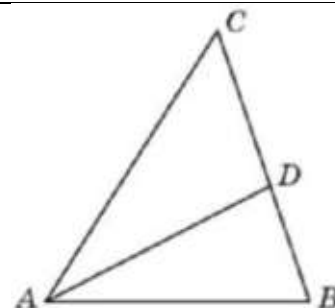


- №7. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

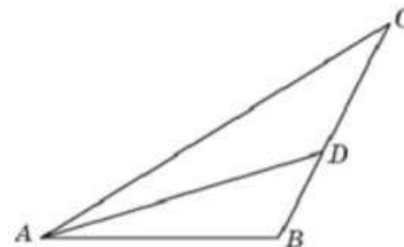
- №8. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B – тупой, CH – высота, угол BCH равен 22° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



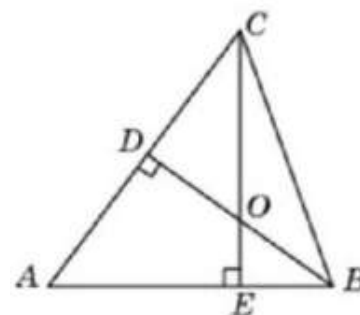
- №9. В треугольнике ABC угол C равен 50° , AD – биссектриса, угол CAD равен 28° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



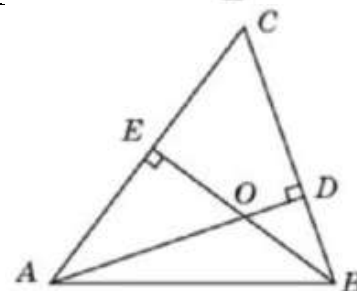
- №10. В треугольнике ABC угол C равен 30° , AD – биссектриса, угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



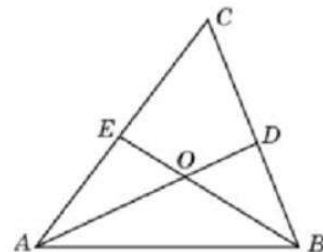
- №11. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 65° . BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



- №12. Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



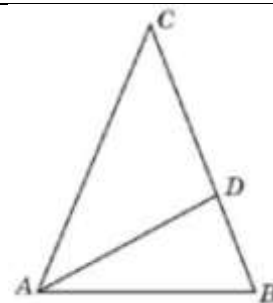
- №13. В треугольнике ABC угол C равен 58° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



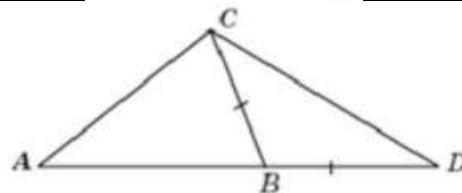
- №14. В треугольнике ABC CH – высота, AD – биссектриса, O – точка пересечения прямых CH и AD , угол BAD равен 26° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.

- №15. В треугольнике ABC CH – высота, AD – биссектриса, O – точка пересечения прямых CH и AD , угол BAD равен 78° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.

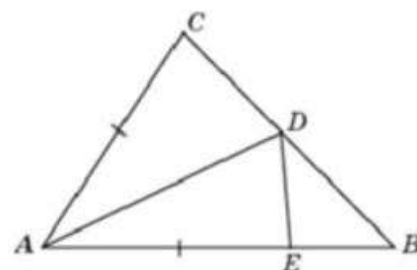
- №16. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



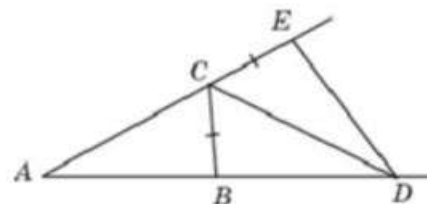
- №17. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC . Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.



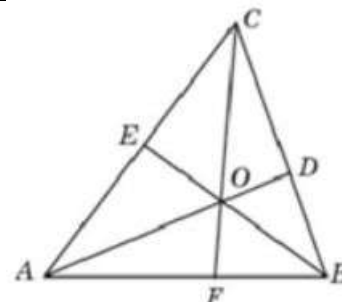
- №18. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 85° , AD – биссектриса, E – такая точка на AB , что $AE = AC$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



- №19. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° , CD – биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.

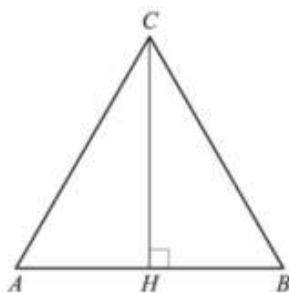


- №20. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



▪ **Решение (примеры)** Равносторонний и произвольный треугольник

№1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



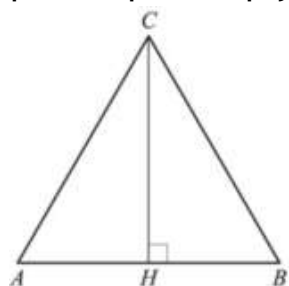
Решение:

В равностороннем треугольнике все углы по 60° . Поскольку CH – высота, то $\triangle ACH$ – прямоугольный и в нем катет

$$CH = AC \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

№2. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите AB .



Решение:

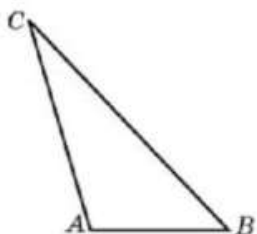
В равностороннем треугольнике все углы по 60° . Поскольку CH – высота, то $\triangle ACH$ – прямоугольный и в нем

$$\operatorname{tg} A = \frac{CH}{AH}, \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AH}, \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{AH}, AH = 2.$$

CH – высота и медиана равностороннего треугольника ABC , тогда $AB = 2AH = 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

№3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30° .

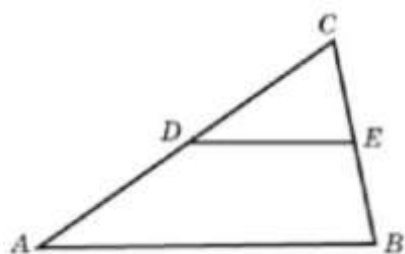


Решение:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \sin 30^\circ = 24.$$

Ответ: 24.

№4. Площадь треугольника ABC равна 4. DE – средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



Решение:

$DE \parallel AB$ и $\frac{AB}{DE} = 2 = k$ по свойству средней линии

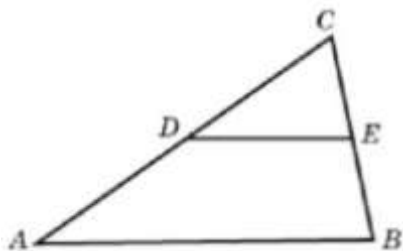
треугольника.

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (по двум углам $\angle C$ – общий, $\angle A = \angle CDE$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и DE).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = k^2, \frac{4}{S_{CDE}} = 2^2, S_{CDE} = 1.$$

Ответ: 1.

- №5. Площадь треугольника ABC равна 10. DE – средняя линия, параллельная AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.



Решение:

$DE \parallel AB$ и $\frac{AB}{DE} = 2 = k$ по свойству средней линии

треугольника.

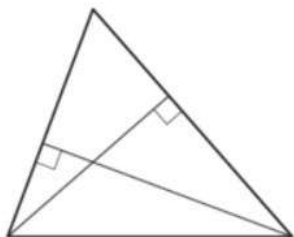
$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (по двум углам $\angle C$ – общий, $\angle A = \angle CDE$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и DE).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = k^2, \quad \frac{10}{S_{CDE}} = 2^2, \quad S_{CDE} = 2,5.$$

$$S_{ABED} = S_{ABC} - S_{CDE} = 10 - 2,5 = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

- №6. В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 4. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.



Решение:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b, \quad a \cdot h_a = b \cdot h_b, \quad 9 \cdot 4 = 6 \cdot h_b, \quad h_b = 6.$$

Ответ: 6.

- №7. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

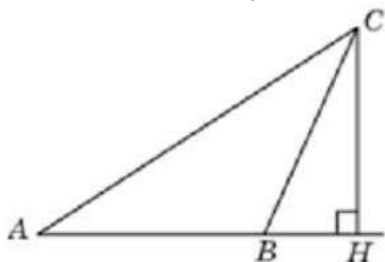
Решение:

Сумма углов в треугольнике равна 180° . Составим уравнение $2x + 3x + 4x = 180^\circ$, $9x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$.

$2x = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ – меньший угол.

Ответ: 40.

- №8. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B – тупой, CH – высота, угол BCH равен 22° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



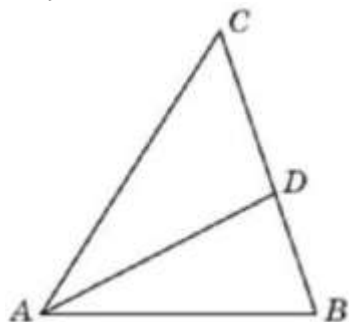
Решение:

$CH \perp AB$, значит, $\triangle ACH$ – прямоугольный и в нем сумма острых углов равна 90° .

$$\angle A + \angle ACH = 90^\circ, \quad 30^\circ + \angle ACB + 22^\circ = 90^\circ, \quad \angle ACB = 38^\circ.$$

Ответ: 38.

- №9. В треугольнике ABC угол C равен 50° , AD – биссектриса, угол CAD равен 28° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



Решение:

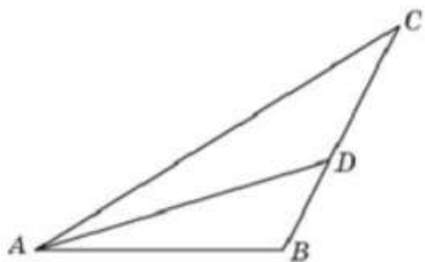
$\angle CAD = 2 \cdot \angle CAD = 2 \cdot 28^\circ = 56^\circ$ – по свойству биссектрисы угла (AD – биссектриса по условию).

Сумма углов в треугольнике равна 180° .

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (50^\circ + 56^\circ) = 74^\circ.$$

Ответ: 74.

- №10. В треугольнике ABC угол C равен 30° , AD – биссектриса, угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



Решение:

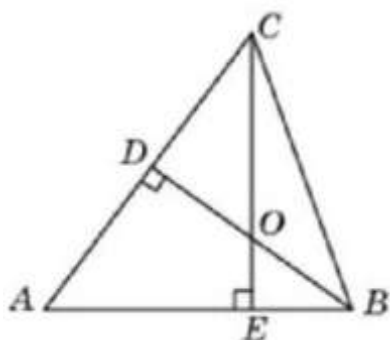
Поскольку AD – биссектриса, то $\angle DAC = \angle BAD = 22^\circ$.

$\angle ADB$ – внешний угол $\triangle ADC$, поэтому

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle C = 22^\circ + 30^\circ = 52^\circ.$$

Ответ: 52.

- №11. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 65° . BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



Решение:

В четырехугольнике $ADOE$ сумма углов равна 360° .

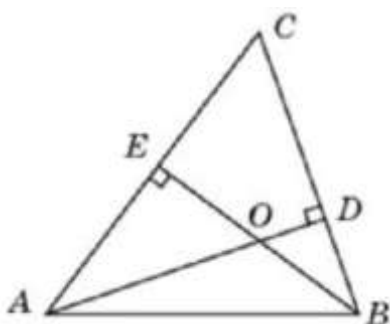
$\angle ADO = \angle AEO = 90^\circ$, тогда

$$\angle ADO + \angle AEO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

$$\angle A + \angle DOE = 180^\circ, \quad \angle DOE = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Ответ: 115.

- №12. Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Решение:

По условию, ищем тупой угол, образованный высотами, выходящими из вершин данных углов. Значит, например,

$\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 72^\circ$, тогда в $\triangle ABC$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (58^\circ + 72^\circ) = 50^\circ.$$

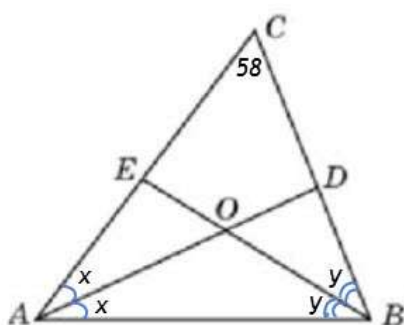
В четырехугольнике $CDOE$ сумма углов равна 360° .

И т.к. $\angle CDO + \angle CEO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то

$$\angle C + \angle DOE = 180^\circ, \quad \angle DOE = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Ответ: 130.

- №13. В треугольнике ABC угол C равен 58° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Решение:

AD – биссектриса $\angle A$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = x$.

BE – биссектриса $\angle B$, значит, $\angle CBE = \angle ABE = y$.

В $\triangle ABC$ $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$,

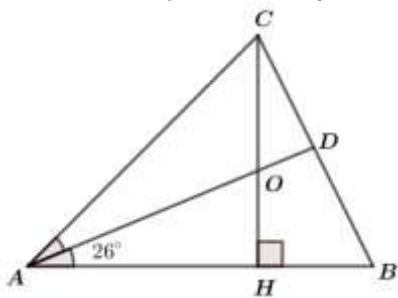
$$2x + 2y = 122^\circ, \quad x + y = 61^\circ.$$

В $\triangle AOB$ $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ$,

$$\angle AOB = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ.$$

Ответ: 119.

- №14. В треугольнике ABC CH – высота, AD – биссектриса, O – точка пересечения прямых CH и AD , угол BAD равен 26° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.



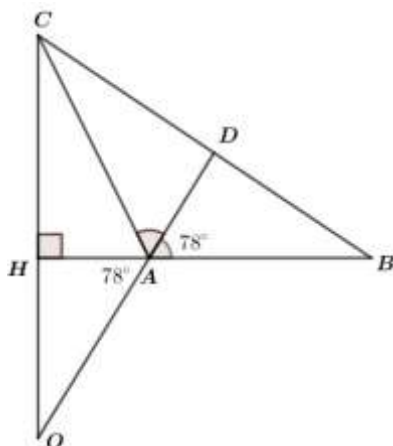
Решение:

Поскольку AD – биссектриса, то $\angle A = 2 \cdot \angle BAD = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$. Основание высоты треугольника ABC , проведенной к одной из сторон острого угла лежит на стороне AB и точка пересечения прямых CH и AD находится внутри треугольника.

$CH \perp AB$, значит, $\triangle AOH$ – прямоугольный и в нем $\angle AOC$ – внешний. Тогда $\angle AOC = \angle OAH + \angle OHA = 26^\circ + 90^\circ = 116^\circ$.

Ответ: 116.

- №15. В треугольнике ABC CH – высота, AD – биссектриса, O – точка пересечения прямых CH и AD , угол BAD равен 78° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.



Решение:

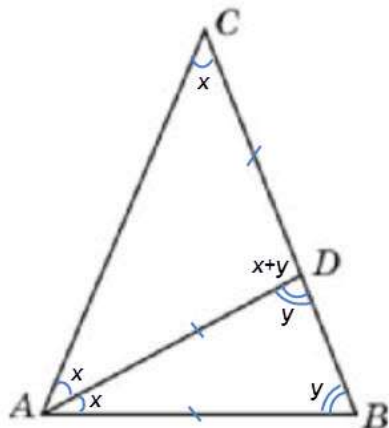
Поскольку AD – биссектриса, то $\angle A = 2 \cdot \angle BAD = 2 \cdot 78^\circ = 156^\circ$. Основание высоты треугольника ABC , проведенной к одной из сторон тупого угла лежит на продолжении стороны AB и точка пересечения прямых CH и AD находится вне треугольника.

$\angle BAD = \angle OAH = 78^\circ$ как вертикальные углы.

$CH \perp AB$, значит, $\triangle AOH$ – прямоугольный и в нем $\angle AOH = 90^\circ - \angle OAH = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$.

Ответ: 12.

- №16. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



Решение:

AD – биссектриса $\angle A$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = x$.

$\triangle BAD$ – равнобедренный (по условию $AB = AD$), тогда $\angle B = \angle ADB = y$ как углы при основании.

$\angle ADC$ – внешний угол $\triangle BAD$, тогда

$\angle ADC = \angle DAB + \angle B = x + y$.

$\triangle ADC$ – равнобедренный (по условию $AD = CD$), тогда $\angle C = \angle CAD = x$ как углы при основании.

В $\triangle ABC$ $180^\circ = 2x + x + y$, $180^\circ = 3x + y$.

В $\triangle ABD$ $180^\circ = y + y + x$, $180^\circ = 2y + x$.

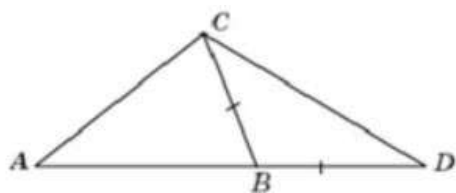
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 180^\circ \\ 2y + x = 180^\circ \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 180^\circ - 3x \\ 2(180^\circ - 3x) + x = 180^\circ \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 72^\circ \\ x = 36^\circ \end{cases}$$

Меньший угол треугольника ABC равен 36° .

Ответ: 36.

- №17. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC . Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.



Решение:

$\angle CBD$ – внешний угол треугольника ABC .

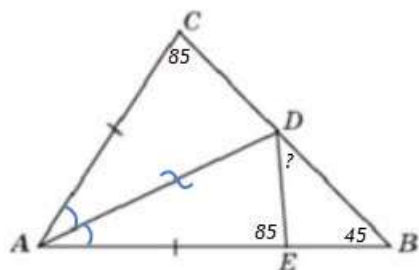
$$\angle CBD = \angle A + \angle ACB = 44^\circ + 62^\circ = 106^\circ.$$

$\triangle BCD$ – равнобедренный, стороны $BD = BC$ по условию,

$$\text{значит, } \angle D = \angle BCD = \frac{180^\circ - \angle CBD}{2} = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = \frac{74^\circ}{2} = 37^\circ$$

Ответ: 37.

- №18. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 85° , AD – биссектриса, E – такая точка на AB , что $AE = AC$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



Решение:

AD – биссектриса, значит, $\angle CAD = \angle DAE$.

$\triangle CAD = \triangle EAD$ по двум сторонам ($AE = AC$ и AD – общая) и

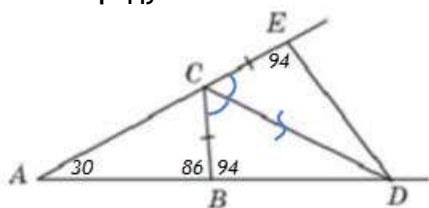
углу между ними $\angle CAD = \angle DAE$, тогда $\angle C = \angle AED = 85^\circ$.

В треугольнике $\triangle AED$ – внешний и

$$\angle AED = \angle B + \angle BDE, \quad \angle BDE = 85^\circ - 45^\circ = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

- №19. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° , CD – биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



Решение:

В $\triangle ABC$ $\angle CBD$ – смежный с $\angle ABC$, поэтому

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ.$$

$\triangle CBD = \triangle CED$ по двум сторонам ($CE = CB$ и CD – общая) и

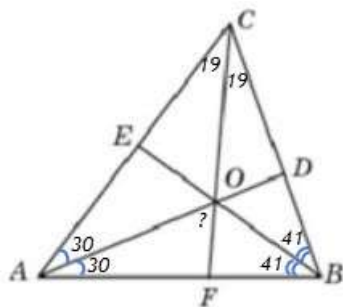
углу между ними $\angle BCD = \angle ECD$ (так как CD – биссектриса внешнего угла при вершине C), тогда $\angle CBD = \angle CED = 94^\circ$.

В $\triangle AED$

$$\angle A + \angle E + \angle D = 180^\circ, \quad \angle D = 180^\circ - (30^\circ + 94^\circ) = 56^\circ$$

Ответ: 56.

- №20. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



Решение:

$$AD \text{ – биссектриса } \angle A, \text{ значит, } \angle CAD = \angle DAB = \frac{\angle A}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

$$BE \text{ – биссектриса } \angle B, \text{ значит, } \angle CBE = \angle ABE = \frac{\angle B}{2} = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ.$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 82^\circ) = 38^\circ.$$

$$CF \text{ – биссектриса } \angle C, \text{ значит, } \angle ACF = \angle BCF = \frac{\angle C}{2} = \frac{38^\circ}{2} = 19^\circ.$$

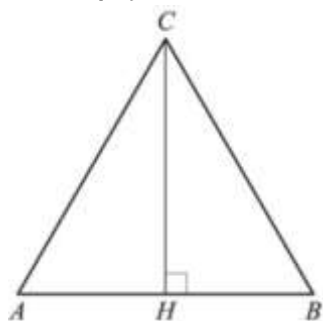
В $\triangle ACO$ $\angle AOF$ – внешний, поэтому

$$\angle AOF = \angle CAO + \angle ACO = 30^\circ + 19^\circ = 49^\circ.$$

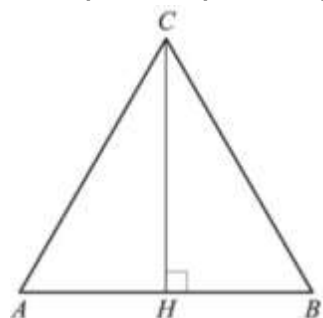
Ответ: 49.

■ Тест Равносторонний и произвольный треугольник

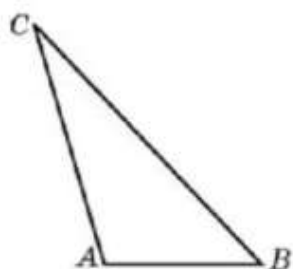
№1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = AC = 48\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



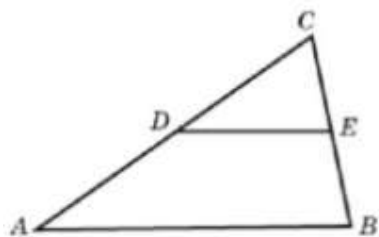
№2. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $11\sqrt{3}$. Найдите AB .



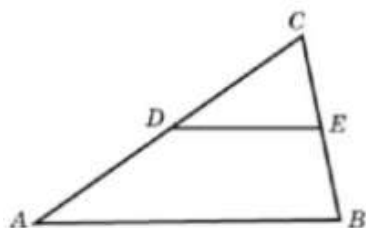
№3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 39 и 18, а угол между ними равен 30° .



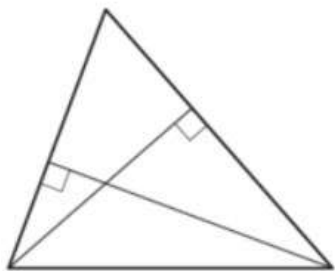
№4. Площадь треугольника ABC равна 176. DE – средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE



№5. Площадь треугольника ABC равна 183. DE – средняя линия, параллельная AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

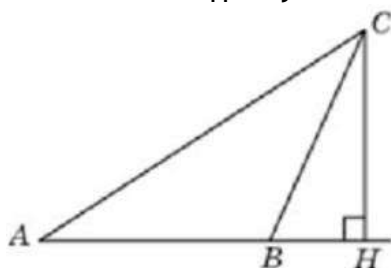


- №6. В треугольнике со сторонами 4 и 12 проведены высоты к этим сторонам. Высота, опущенная на большую из этих сторон, равна 3. Найдите высоту, опущенную на меньшую из этих сторон треугольника.

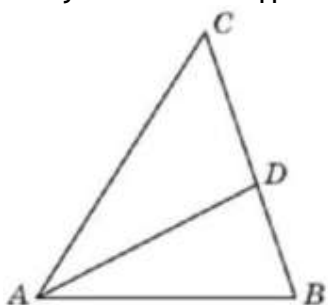


- №7. Углы треугольника относятся как 2:8:35. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

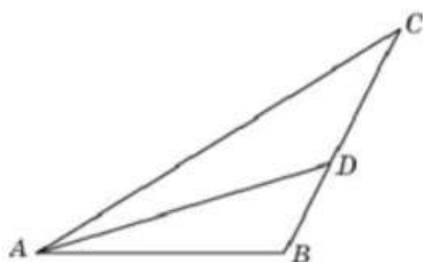
- №8. В треугольнике ABC угол A равен 4° , угол B – тупой, CH – высота, угол BCH равен 78° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



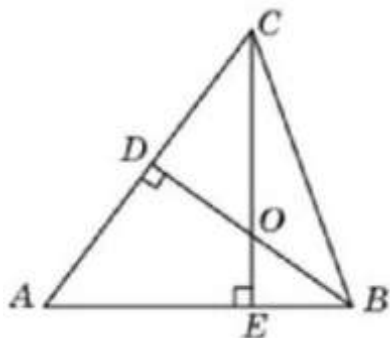
- №9. В треугольнике ABC угол C равен 96° , AD – биссектриса, угол CAD равен 5° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



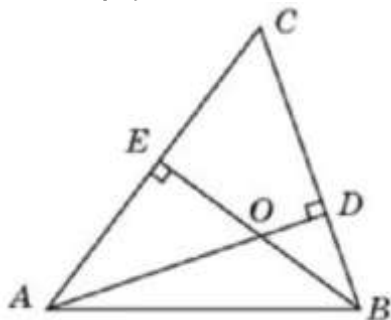
- №10. В треугольнике ABC угол C равен 15° , AD – биссектриса, угол BAD равен 51° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



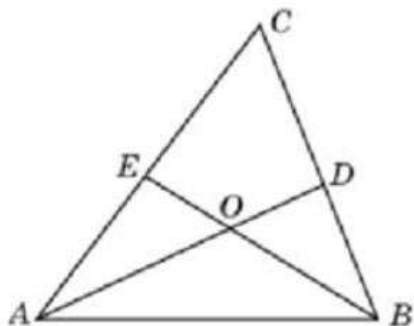
- №11. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 15° . BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.



- №12. Два угла треугольника равны 103° и 48° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

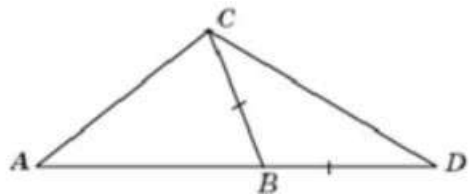


- №13. В треугольнике ABC угол C равен 110° , AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.

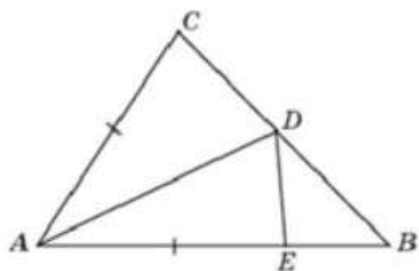


- №14. В треугольнике ABC CH – высота, AD – биссектриса, O – точка пересечения прямых CH и AD , угол BAD равен 52° . Найдите угол AOC . Ответ дайте в градусах.

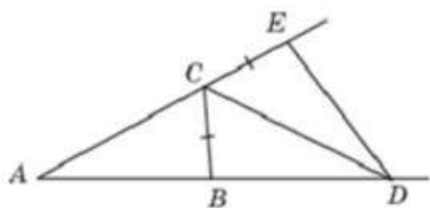
- №15. В треугольнике ABC угол A равен 24° , угол C равен 47° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC . Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.



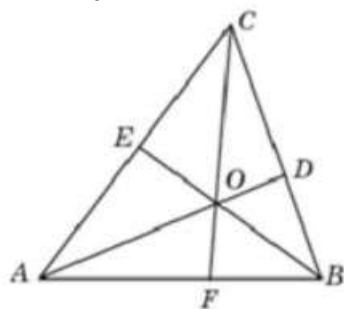
- №16. В треугольнике ABC угол B равен 8° , угол C равен 49° , AD – биссектриса, E – такая точка на AB , что $AE = AC$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



- №17. В треугольнике ABC угол A равен 17° , угол B равен 46° , CD – биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



- №18. В треугольнике ABC угол A равен 76° , угол B равен 65° . AD , BE и CF – биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



■ **Ответы (тест)** Равносторонний и произвольный треугольник

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
72	22	175,5	44	137,25	9	8	8	74

№10	№11	№12	№13	№14	№15	№16	№17	№18
66	165	151	145	38	54,5	41	29	57,5