

Задачи на оптимизацию повышенной сложности

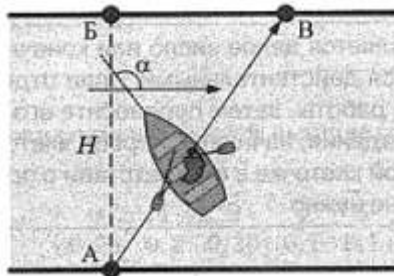
Примеры

- №1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 40$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1$ м/с.

- №3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться закону

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \text{ где } U \text{ – амплитуда напряжения на источнике тока, } \omega \text{ – частота}$$

переменного тока (в с^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,027$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 15$ с?

- №5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300 \text{ К}$.

- №6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (\text{распределение Максвелла}).$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная, $M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 400 \text{ К}$.

Решение (примеры) Задачи на оптимизацию повышенной сложности

№1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 40$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

Решение:

Запишем выражение для тепловой мощности, которую может выделять этот источник, в виде:

$$P = \left(\frac{\varepsilon}{r + R} \right)^2 \cdot R, \quad P = \varepsilon^2 \cdot \frac{R}{(r + R)^2}.$$

По условию $\varepsilon = 40$ и $r = 1$, тогда получим $P = 40^2 \cdot \frac{R}{(1 + R)^2}$.

Введем функцию $f(R) = \frac{R}{(1 + R)^2}$ и найдем ее наибольшее значение при $R \geq 0$, тогда выражение

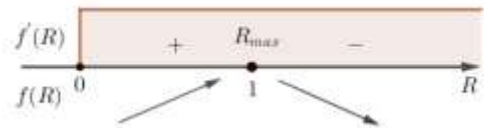
$P = 40^2 \cdot f(R)$ тоже будет принимать наибольшее значение.

Вычислим производную функции $f(R) = \frac{R}{(1 + R)^2}$:

$$f'(R) = \left(\frac{R}{(1 + R)^2} \right)' = \frac{R' \cdot (1 + R)^2 - ((1 + R)^2)' \cdot R}{((1 + R)^2)^2} = \frac{(1 + R)^2 - 2R(1 + R)}{(1 + R)^4} = \frac{(1 + R)(1 + R - 2R)}{(1 + R)^4} = \frac{1 - R}{(1 + R)^3}.$$

$$f'(R) = \frac{1 - R}{(1 + R)^3}, \quad f'(R) = 0, \quad 1 - R = 0, \quad R = 1.$$

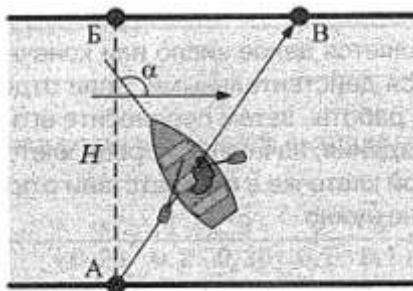
$$R_{\max} = 1, \quad f(R_{\max}) = f(1) = \frac{1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{4}$$



Наибольшее значение выражения $P = 40^2 \cdot f(R_{\max}) = 1600 \cdot \frac{1}{4} = 400$.

Ответ: 400 Вт.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1$ м/с.

Решение:

По условию $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1$ м/с, тогда выражение для расстояния примет вид

$L = 60 \cdot \frac{2 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Введем функцию $f(\alpha) = \frac{2 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ и исследуем ее на наименьшее значение для всех $\alpha \in (0; \pi)$, тогда выражение $L = 60 \cdot f(\alpha)$ тоже будет принимать наименьшее значение.

Вычислим производную функции $f(\alpha) = \frac{2 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$:

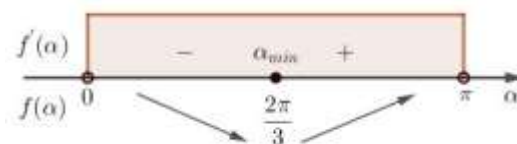
$$f'(\alpha) = \left(\frac{2 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)' = \frac{(2 + \cos \alpha)' \cdot \sin \alpha - (\sin \alpha)' \cdot (2 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{-\sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (2 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha},$$

$$f'(\alpha) = \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{1 + 2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$f'(\alpha) = 0, \quad 1 + 2 \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}. \text{ Учитывая, что } \alpha \in (0; \pi), \text{ получим } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1 + 2 \cos \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = -\frac{1 + 1}{\frac{3}{4}} < 0,$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1 + 2 \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin^2 \frac{5\pi}{6}} = -\frac{1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} > 0.$$



$$\alpha_{\min} = \frac{2\pi}{3}, \quad f_{\min} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2 + \cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}.$$

Наименьшее расстояние $L = 60 \cdot f_{\min} = 60\sqrt{3}$.

Ответ: $60\sqrt{3}$.

№3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет

подчиняться закону $U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, где U – амплитуда напряжения на

источнике тока, ω – частота переменного тока (в c^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,027$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды напряжения на катушке в виде:

$$U_L(\omega) = \frac{UL \cdot \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 : \omega^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) : \omega^2}}$$

$$U_L(\omega) = UL \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{R^2}{\omega^2} + L^2 - \frac{2L}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega^4 C^2}}} = UL \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) + L^2}}$$

Выражение $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда выражение

$\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)$ принимает наименьшее значение.

Сделаем замену $x = \frac{1}{\omega^2}$. Получим функцию $f(x) = \frac{1}{C^2} \cdot x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) \cdot x$. Квадратичная функция,

которая имеет точку минимума $x_0 = -\frac{R^2 - \frac{2L}{C}}{2 \cdot \frac{1}{C^2}} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2}$.

$$x_0 = \frac{2 \cdot 0,027 \cdot 10^{-5} - 20^2 \cdot (10^{-5})^2}{2} = \frac{54 \cdot 10^{-8} - 4 \cdot 10^{-8}}{2} = \frac{50 \cdot 10^{-8}}{2} = 25 \cdot 10^{-8} = 2,5 \cdot 10^{-7}.$$

При данных значениях L , C и R значение x_0 положительно.

Значит, функция $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение при условии $\frac{1}{\omega^2} = 25 \cdot 10^{-8}$, откуда $\frac{1}{\omega} = 5 \cdot 10^{-4}$,

$$\frac{1}{\omega} = \frac{5}{10 \cdot 10^3}, \quad \omega = 2000 \text{ (} c^{-1} \text{)}.$$

Ответ: $2000 \text{ } c^{-1}$.

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 15$ с?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды в виде:

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{\frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{f(\tau^2)}.$$

Значение $k\theta_0$ положительно, следовательно, выражения $A(\tau)$ и $f(\tau^2) = \frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + nT^2 \cdot \tau^2}$

принимают наибольшее значение при одинаковом значении τ .

Рассмотрим функцию $g(\tau^2) = \frac{1}{f(\tau^2)} = \frac{(T^2 - \tau^2)^2 + nT^2 \cdot \tau^2}{\tau^4}$ и найдем ее наименьшее значение.

$$g(\tau^2) = \frac{T^4 - 2T^2 \cdot \tau^2 + \tau^4 + nT^2 \cdot \tau^2}{\tau^4} = \frac{T^4}{\tau^4} - 2 \cdot \frac{T^2}{\tau^2} + 1 + n \cdot \frac{T^2}{\tau^2}. \text{ Пусть } t = \frac{T^2}{\tau^2}, \text{ тогда } g(t) = t^2 - (2-n)t + 1.$$

Квадратичная функция $g(t) = t^2 - (2-n)t + 1$ достигает своего наименьшего значения в вершине

$t_g = -\frac{-(2-n)}{2} = \frac{2-n}{2}$. Учитывая, что n – числовой коэффициент, принимающий значения в пределах от 0 до 1, то $(2-n) > 0$, тогда и $t_g > 0$. Вернемся к замене

$$t = \frac{T^2}{\tau^2}, \quad \frac{2-n}{2} = \frac{15^2}{\tau^2}, \quad \tau^2 = \frac{15^2 \cdot 2}{2-n}, \quad \tau = 15 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}.$$

Значит, функция $g(\tau^2)$ достигает наименьшее значение при $\tau = 15 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$, тогда $f(\tau^2)$ достигает

наибольшее значение при том же значении τ . Ответ: $15 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$.

№5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300 \text{ К}$.

Решение:

Преобразуем функцию: $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{2}{kT\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Пусть $x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$ и введем

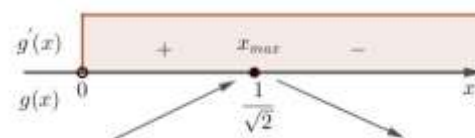
функцию $g(x) = x \cdot e^{-x^2}$. Поскольку $\frac{2}{kT\sqrt{\pi}} > 0$, то выражения $g\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$ и $f(\varepsilon)$ принимают наибольшее

значение при одном и том значении переменной ε . Исследуем функцию $g(x)$ при $x \geq 0$ на наибольшее значение. Найдем производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x^2})' = x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot (e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} (1 - 2x^2).$$

$$g'(x) = e^{-x^2} (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x), \quad x \geq 0$$

$$g'(x) = 0, 1 - \sqrt{2}x = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Функция $g(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$, $\varepsilon = \frac{kT}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2} = 2,07 \cdot 10^{-21}$ (джоулей).

Ответ: $2,07 \cdot 10^{-21}$ Дж.

№6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (\text{распределение Максвелла}).$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная,

$M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором

значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 400$ К.

Решение:

Запишем выражение для функции распределения плотности в виде:

$$f(v) = 4\pi v^2 \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \left(\frac{M}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{M\pi v^2}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{Mv^2}{2RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}.$$

Пусть $x = \frac{Mv^2}{2RT}$ и введем функцию $g(x) = x \cdot e^{-x}$. Функцию $f(v)$ можно записать в виде

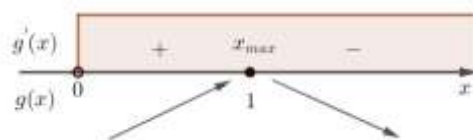
$$f(v) = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right). \text{ С учетом того, что } 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} > 0, \text{ то выражения } f(v) \text{ и } g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right)$$

принимают наибольшее значение при одинаковом значении v . Найдем наибольшее значение функции $g(x)$ при $x \geq 0$. Вычислим производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x})' = x' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} (1 - x).$$

$$g'(x) = e^{-x} (1 - x), \quad g'(x) = 0, \quad 1 - x = 0, \quad x = 1.$$

Наибольшее значение функция принимает при $x = 1$.



Значит, функция $f(v)$ принимает наибольшее значение при $1 = \frac{Mv^2}{2RT}$.

$$\text{Тогда } v^2 = \frac{2RT}{M}, \quad v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2R \cdot 400}{0,002}} = \sqrt{400000R} = 200\sqrt{10R}.$$

Ответ: $200\sqrt{10R}$

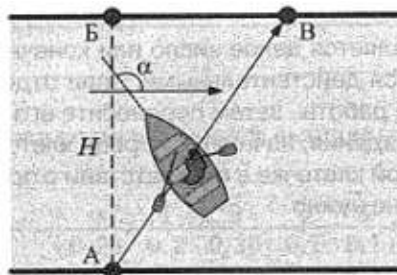
Вариант 1

- №1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 50$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1,6$ м/с.

- №3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться закону

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \text{ где } U \text{ – амплитуда напряжения на источнике тока, } \omega \text{ – частота}$$

переменного тока (в с^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,045$ Гн, $C = 10^{-4}$ Ф и $R = 10$ Ом?

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 14,8$ с?

- №5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 100 \text{ К}$.

- №6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (\text{распределение Максвелла}).$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная,

$M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором

значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 600 \text{ К}$.

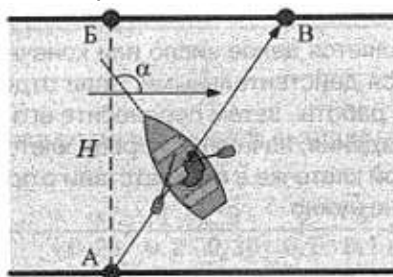
Вариант 2

- №1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 40 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r = 1,6 \text{ Ом}$. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 80 \text{ м}$, $u = 1,5 \text{ м/с}$, $v = 1,2 \text{ м/с}$.

- №3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться закону

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \text{ где } U - \text{амплитуда напряжения на источнике тока, } \omega - \text{частота}$$

переменного тока (в с^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,09$ Гн, $C = 5 \cdot 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 15,6$ с?

- №5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 200$ К.

- №6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \text{ (распределение Максвелла).}$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная,

$M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 300$ К.

■ Ответы (тест)

Задачи на оптимизацию повышенной сложности

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар. 1	625	45	500	$14,8 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$	$6,9 \cdot 10^{-22}$	$200\sqrt{15R}$
Вар. 2	250	60	500	$15,6 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$	$1,38 \cdot 10^{-21}$	$100\sqrt{15R}$

Вариант 1

- №1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 50$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

Решение:

Запишем выражение для тепловой мощности, которую может выделять этот источник, в виде:

$$P = \left(\frac{\varepsilon}{r + R} \right)^2 \cdot R, \quad P = \varepsilon^2 \cdot \frac{R}{(r + R)^2}.$$

По условию $\varepsilon = 50$ и $r = 1$, тогда получим $P = 50^2 \cdot \frac{R}{(1 + R)^2}$.

Введем функцию $f(R) = \frac{R}{(1 + R)^2}$ и найдем ее наибольшее значение при $R \geq 0$, тогда выражение

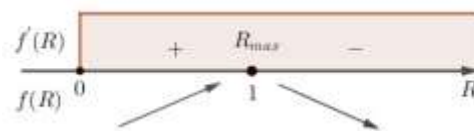
$P = 40^2 \cdot f(R)$ тоже будет принимать наибольшее значение.

Вычислим производную функции $f(R) = \frac{R}{(1 + R)^2}$:

$$f'(R) = \left(\frac{R}{(1 + R)^2} \right)' = \frac{R' \cdot (1 + R)^2 - (1 + R)^2' \cdot R}{((1 + R)^2)^2} = \frac{(1 + R)^2 - 2R(1 + R)}{(1 + R)^4} = \frac{(1 + R)(1 + R - 2R)}{(1 + R)^4} = \frac{1 - R}{(1 + R)^3}.$$

$$f'(R) = \frac{1 - R}{(1 + R)^3}, \quad f'(R) = 0, \quad 1 - R = 0, \quad R = 1.$$

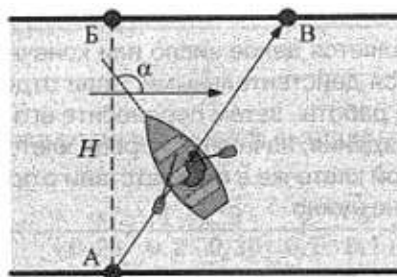
$$R_{\max} = 1, \quad f(R_{\max}) = f(1) = \frac{1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{4}$$



Наибольшее значение выражения $P = 50^2 \cdot f(R_{\max}) = 2500 \cdot \frac{1}{4} = 625$.

Ответ: 625 Вт.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1,6$ м/с.

Решение:

По условию $H = 60$ м, $u = 2$ м/с, $v = 1,6$ м/с, тогда выражение для расстояния примет вид

$$L = 60 \cdot \frac{2 + 1,6 \cos \alpha}{1,6 \sin \alpha} = \frac{60 \cdot 2(1 + 0,8 \cos \alpha)}{1,6 \sin \alpha} = 75 \cdot \frac{1 + 0,8 \cos \alpha}{\sin \alpha}. \text{ Введем функцию } f(\alpha) = \frac{1 + 0,8 \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ и}$$

исследуем ее на наименьшее значение для всех $\alpha \in (0; \pi)$, тогда выражение $L = 75 \cdot f(\alpha)$ тоже будет принимать наименьшее значение.

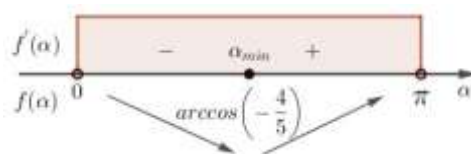
Вычислим производную функции $f(\alpha) = \frac{1 + 0,8 \cos \alpha}{\sin \alpha}$:

$$f'(\alpha) = \left(\frac{1 + 0,8 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)' = \frac{(1 + 0,8 \cos \alpha)' \cdot \sin \alpha - (\sin \alpha)' \cdot (1 + 0,8 \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{-0,8 \sin^2 \alpha - 0,8 \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$f'(\alpha) = -\frac{0,8 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$f'(\alpha) = 0, \quad 0,8 + \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ Учитывая, что } \alpha \in (0; \pi), \text{ получим } \alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right).$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2,56 + 3,2 \cos \frac{\pi}{2}}{2,56 \sin^2 \frac{\pi}{2}} = -\frac{2,56}{2,56} = -1 < 0.$$



$$\alpha_{\min} = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right), \quad f_{\min} = f\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{1 + 0,8 \cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)}{\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)} = \frac{1 - 0,8 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Наименьшее расстояние } L = 75 \cdot f_{\min} = 75 \cdot \frac{3}{5} = 45.$$

Ответ: 45.

№3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет

подчиняться закону $U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, где U – амплитуда напряжения на источнике

тока, ω – частота переменного тока (в c^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,045$ Гн, $C = 10^{-4}$ Ф и $R = 10$ Ом?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды напряжения на катушке в виде:

$$U_L(\omega) = \frac{UL \cdot \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 : \omega^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) : \omega^2}}$$

$$U_L(\omega) = UL \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{R^2}{\omega^2} + L^2 - \frac{2L}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega^4 C^2}}} = UL \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) + L^2}}$$

Выражение $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда выражение

$\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)$ принимает наименьшее значение.

Сделаем замену $x = \frac{1}{\omega^2}$. Получим функцию $f(x) = \frac{1}{C^2} \cdot x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) \cdot x$. Квадратичная функция,

которая имеет точку минимума $x_0 = -\frac{R^2 - \frac{2L}{C}}{2 \cdot \frac{1}{C^2}} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2}$.

$$x_0 = \frac{2 \cdot 0,045 \cdot 10^{-4} - 10^2 \cdot (10^{-4})^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} - 10^{-6}}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{2} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

При данных значениях L , C и R значение x_0 положительно.

Значит, функция $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение при условии $\frac{1}{\omega^2} = 4 \cdot 10^{-6}$, откуда $\frac{1}{\omega} = 2 \cdot 10^{-3}$,

$$\frac{1}{\omega} = \frac{2}{10 \cdot 10^2}, \quad \omega = 500 \text{ (} c^{-1} \text{)}.$$

Ответ: 500 c^{-1} .

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 14,8$ с?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды в виде:

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{\frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{f(\tau^2)}.$$

Значение $k\theta_0$ положительно, следовательно, выражения $A(\tau)$ и $f(\tau^2) = \frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}$

принимают наибольшее значение при одинаковом значении τ .

Рассмотрим функцию $g(\tau^2) = \frac{1}{f(\tau^2)} = \frac{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}{\tau^4}$ и найдем ее наименьшее значение.

$$g(\tau^2) = \frac{T^4 - 2T^2 \cdot \tau^2 + \tau^4 + nT^2 \cdot \tau^2}{\tau^4} = \frac{T^4}{\tau^4} - 2 \cdot \frac{T^2}{\tau^2} + 1 + n \cdot \frac{T^2}{\tau^2}. \text{ Пусть } t = \frac{T^2}{\tau^2}, \text{ тогда } g(t) = t^2 - (2-n)t + 1.$$

Квадратичная функция $g(t) = t^2 - (2-n)t + 1$ достигает своего наименьшего значения в вершине

$$t_0 = -\frac{-(2-n)}{2} = \frac{2-n}{2}. \text{ Вернемся к замене } t = \frac{T^2}{\tau^2}, \quad \frac{2-n}{2} = \frac{15^2}{\tau^2}, \quad \tau^2 = \frac{15^2 \cdot 2}{2-n}, \quad \tau = 14,8 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}.$$

Значит, функция $g(\tau^2)$ достигает наименьшее значение при $\tau = 15 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$, тогда $f(\tau^2)$ достигает

наибольшее значение при том же значении τ .

$$\text{Ответ: } 14,8 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}.$$

№5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 100 \text{ К}$.

Решение:

Преобразуем функцию: $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{2}{kT\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Пусть $x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$ и введем

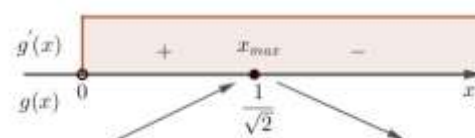
функцию $g(x) = x \cdot e^{-x^2}$. Поскольку $\frac{2}{kT\sqrt{\pi}} > 0$, то выражения $g\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$ и $f(\varepsilon)$ принимают наибольшее

значение при одном и том значении переменной ε . Исследуем функцию $g(x)$ при $x \geq 0$ на наибольшее значение. Найдём производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x^2})' = x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot (e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} (1 - 2x^2).$$

$$g'(x) = e^{-x^2} (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x), \quad x \geq 0$$

$$g'(x) = 0, \quad 1 - \sqrt{2}x = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Функция $g(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$, $\varepsilon = \frac{kT}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 100}{2} = 6,9 \cdot 10^{-22}$ (джоулей).

Ответ: $6,9 \cdot 10^{-22}$ Дж.

№6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (\text{распределение Максвелла}).$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная,

$M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором

значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 600$ К.

Решение:

Запишем выражение для функции распределения плотности в виде:

$$f(v) = 4\pi v^2 \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \left(\frac{M}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{M\pi v^2}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{Mv^2}{2RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}.$$

Пусть $x = \frac{Mv^2}{2RT}$ и введем функцию $g(x) = x \cdot e^{-x}$. Функцию $f(v)$ можно записать в виде

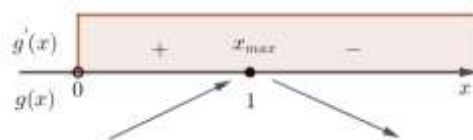
$$f(v) = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right). \text{ С учетом того, что } 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} > 0, \text{ то выражения } f(v) \text{ и } g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right)$$

принимают наибольшее значение при одинаковом значении v . Найдем наибольшее значение функции $g(x)$ при $x \geq 0$. Вычислим производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x})' = x' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} (1 - x).$$

$$g'(x) = e^{-x} (1 - x), \quad g'(x) = 0, \quad 1 - x = 0, \quad x = 1.$$

Наибольшее значение функция принимает при $x = 1$.



Значит, функция $f(v)$ принимает наибольшее значение при $1 = \frac{Mv^2}{2RT}$.

$$\text{Тогда } v^2 = \frac{2RT}{M}, \quad v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2R \cdot 600}{0,002}} = \sqrt{600000R} = 200\sqrt{15R}.$$

Ответ: $200\sqrt{15R}$.

Вариант 2

- №1. Источник постоянного напряжения имеет электродвижущую силу $\varepsilon = 40$ В и внутреннее сопротивление $r = 1,6$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R},$$

Где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2 R$ (закон Джоуля-Ленца). Найдите наибольшую возможную тепловую мощность P , которую может выделять этот источник.

Решение:

Запишем выражение для тепловой мощности, которую может выделять этот источник, в виде:

$$P = \left(\frac{\varepsilon}{r + R} \right)^2 \cdot R, \quad P = \varepsilon^2 \cdot \frac{R}{(r + R)^2}.$$

По условию $\varepsilon = 40$ и $r = 1,6$, тогда получим $P = 40^2 \cdot \frac{R}{(1,6 + R)^2}$.

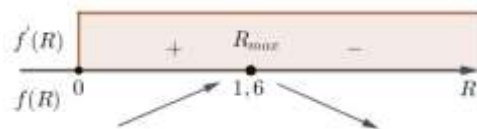
Введем функцию $f(R) = \frac{R}{(1,6 + R)^2}$ и найдем ее наибольшее значение при $R \geq 0$, тогда выражение

$P = 40^2 \cdot f(R)$ тоже будет принимать наибольшее значение.

Вычислим производную функции $f(R) = \frac{R}{(1,6 + R)^2}$:

$$f'(R) = \left(\frac{R}{(1,6 + R)^2} \right)' = \frac{R' \cdot (1,6 + R)^2 - ((1,6 + R)^2)' \cdot R}{((1,6 + R)^2)^2} = \frac{(1,6 + R)^2 - 2R(1,6 + R)}{(1,6 + R)^4} = \frac{1,6 - R}{(1,6 + R)^3}.$$

$$f'(R) = \frac{1,6 - R}{(1,6 + R)^3}, \quad f'(R) = 0, \quad 1,6 - R = 0, \quad R = 1,6.$$

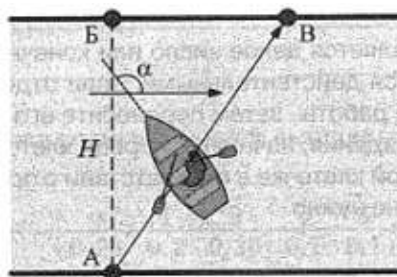


$$R_{\max} = 1,6; \quad f(R_{\max}) = f(1,6) = \frac{1,6}{(1,6 + 1,6)^2} = \frac{1,6}{(2 \cdot 1,6)^2} = \frac{1,6}{4 \cdot 1,6^2} = \frac{1}{4 \cdot 1,6} = \frac{5}{32}$$

$$\text{Наибольшее значение выражения } P = 40^2 \cdot f(R_{\max}) = 1600 \cdot \frac{5}{32} = 250.$$

Ответ: 250 Вт.

- №2. На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cdot \cos \alpha}{v \cdot \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 80$ м, $u = 1,5$ м/с, $v = 1,2$ м/с.

Решение:

По условию $H = 80$ м, $u = 1,5$ м/с, $v = 1,2$ м/с, тогда выражение для расстояния примет вид

$$L = 80 \cdot \frac{1,5 + 1,2 \cos \alpha}{1,2 \sin \alpha} = \frac{80 \cdot 1,2 (1,25 + \cos \alpha)}{1,2 \sin \alpha} = 80 \cdot \frac{1,25 + \cos \alpha}{\sin \alpha}. \text{ Введем функцию } f(\alpha) = \frac{1,25 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ и}$$

исследуем ее на наименьшее значение для всех $\alpha \in (0; \pi)$, тогда выражение $L = 80 \cdot f(\alpha)$ тоже будет принимать наименьшее значение.

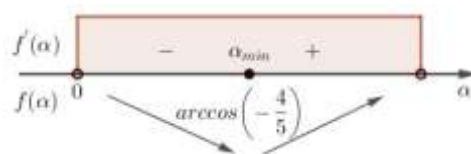
Вычислим производную функции $f(\alpha) = \frac{1,25 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$:

$$f'(\alpha) = \left(\frac{1,25 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)' = \frac{(1,25 + \cos \alpha)' \cdot \sin \alpha - (\sin \alpha)' \cdot (1,25 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1,25 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1 + 1,25 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$f'(\alpha) = 0, \quad 1 + 1,25 \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ Учитывая, что } \alpha \in (0; \pi), \text{ получим } \alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right).$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1 + 1,25 \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{1} = -1 < 0.$$



$$\alpha_{\min} = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right), \quad f_{\min} = f\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{1,25 + \cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)}{\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)} = \frac{1,25 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Наименьшее расстояние } L = 80 \cdot f_{\min} = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60.$$

Ответ: 60.

№3. Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет

подчиняться закону $U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, где U – амплитуда напряжения на источнике

тока, ω – частота переменного тока (в c^{-1}), L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора, R – сопротивление резистора. При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0,09$ Гн, $C = 5 \cdot 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды напряжения на катушке в виде:

$$U_L(\omega) = \frac{UL \cdot \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = UL \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 : \omega^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) : \omega^2}}$$

$$U_L(\omega) = UL \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{R^2}{\omega^2} + L^2 - \frac{2L}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega^4 C^2}}} = UL \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) + L^2}}$$

Выражение $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда выражение

$\frac{1}{\omega^4 C^2} + \frac{1}{\omega^2} \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)$ принимает наименьшее значение.

Сделаем замену $x = \frac{1}{\omega^2}$. Получим функцию $f(x) = \frac{1}{C^2} \cdot x^2 + \left(R^2 - \frac{2L}{C}\right) \cdot x$. Квадратичная функция,

которая имеет точку минимума $x_0 = -\frac{R^2 - \frac{2L}{C}}{2 \cdot \frac{1}{C^2}} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2}$.

$$x_0 = \frac{2 \cdot 0,09 \cdot 5 \cdot 10^{-5} - 20^2 \cdot (5 \cdot 10^{-5})^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-6} - 10^{-6}}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{2} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

При данных значениях L , C и R значение x_0 положительно.

Значит, функция $U_L(\omega)$ принимает наибольшее значение при условии $\frac{1}{\omega^2} = 4 \cdot 10^{-6}$, откуда $\frac{1}{\omega} = 2 \cdot 10^{-3}$,

$$\frac{1}{\omega} = \frac{2}{10 \cdot 10^2}, \quad \omega = 500 \text{ (} c^{-1} \text{)}.$$

Ответ: $500 \text{ } c^{-1}$.

- №4. Судно стоит на открытой воде бортом к волне. Под действием волн оно испытывает вынужденные поперечные колебания. Зависимость амплитуды колебаний (в градусах) от периода волны τ (в секундах) выражается формулой

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}.$$

Положительный коэффициент k определяется отношением ширины судна к длине волны, θ_0 – угол наибольшего волнового склона (принимает значения в пределах от 0° до 26°), T – период свободных поперечных колебаний судна на тихой воде, n – числовой коэффициент, зависящий от сопротивления воды (принимает значения в пределах от 0 до 1). При каком периоде волны τ амплитуда вынужденных колебаний судна будет наибольшей, если $T = 15,6$ с?

Решение:

Запишем выражение для амплитуды в виде:

$$A(\tau) = k\theta_0 \frac{\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{\frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}} = k\theta_0 \sqrt{f(\tau^2)}.$$

Значение $k\theta_0$ положительно, следовательно, выражения $A(\tau)$ и $f(\tau^2) = \frac{\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}$ принимают наибольшее значение при одинаковом значении τ .

Рассмотрим функцию $g(\tau^2) = \frac{1}{f(\tau^2)} = \frac{(T^2 - \tau^2)^2 + nT^2 \cdot \tau^2}{\tau^4}$ и найдем ее наименьшее значение.

$$g(\tau^2) = \frac{T^4 - 2T^2 \cdot \tau^2 + \tau^4 + nT^2 \cdot \tau^2}{\tau^4} = \frac{T^4}{\tau^4} - 2 \cdot \frac{T^2}{\tau^2} + 1 + n \cdot \frac{T^2}{\tau^2}. \text{ Пусть } t = \frac{T^2}{\tau^2}, \text{ тогда } g(t) = t^2 - (2-n)t + 1.$$

Квадратичная функция $g(t) = t^2 - (2-n)t + 1$ достигает своего наименьшего значения в вершине

$$t_0 = -\frac{-(2-n)}{2} = \frac{2-n}{2}. \text{ Вернемся к замене } t = \frac{T^2}{\tau^2}, \quad \frac{2-n}{2} = \frac{15^2}{\tau^2}, \quad \tau^2 = \frac{15^2 \cdot 2}{2-n}, \quad \tau = 14,8 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}.$$

Значит, функция $g(\tau^2)$ достигает наименьшее значение при $\tau = 15,6 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}$, тогда $f(\tau^2)$ достигает

наибольшее значение при том же значении τ .

$$\text{Ответ: } 15,6 \cdot \sqrt{\frac{2}{2-n}}.$$

№5. Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 200 \text{ К}$.

Решение:

Преобразуем функцию: $f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{2}{kT\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Пусть $x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$ и введем

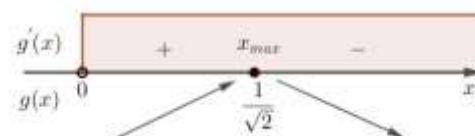
функцию $g(x) = x \cdot e^{-x^2}$. Поскольку $\frac{2}{kT\sqrt{\pi}} > 0$, то выражения $g\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$ и $f(\varepsilon)$ принимают наибольшее

значение при одном и том значении переменной ε . Исследуем функцию $g(x)$ при $x \geq 0$ на наибольшее значение. Найдём производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x^2})' = x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot (e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} (1 - 2x^2).$$

$$g'(x) = e^{-x^2} (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x), \quad x \geq 0$$

$$g'(x) = 0, \quad 1 - \sqrt{2}x = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Функция $g(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}$, $\varepsilon = \frac{kT}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 200}{2} = 1,38 \cdot 10^{-21} \text{ (джоулей)}$.

Ответ: $1,38 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$.

№6. Распределение скорости молекул водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (\text{распределение Максвелла}).$$

В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R – универсальная газовая постоянная,

$M = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При котором

значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 300$ К.

Решение:

Запишем выражение для функции распределения плотности в виде:

$$f(v) = 4\pi v^2 \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \left(\frac{M}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{M\pi v^2}{2\pi RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{Mv^2}{2RT} \right) \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}.$$

Пусть $x = \frac{Mv^2}{2RT}$ и введем функцию $g(x) = x \cdot e^{-x}$. Функцию $f(v)$ можно записать в виде

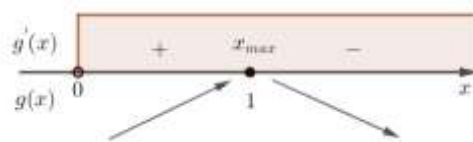
$$f(v) = 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} \cdot g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right). \text{ С учетом того, что } 4\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} > 0, \text{ то выражения } f(v) \text{ и } g\left(\frac{Mv^2}{2RT}\right)$$

принимают наибольшее значение при одинаковом значении v . Найдем наибольшее значение функции $g(x)$ при $x \geq 0$. Вычислим производную:

$$g'(x) = (x \cdot e^{-x})' = x' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} (1 - x).$$

$$g'(x) = e^{-x} (1 - x), \quad g'(x) = 0, \quad 1 - x = 0, \quad x = 1.$$

Наибольшее значение функция принимает при $x = 1$.



Значит, функция $f(v)$ принимает наибольшее значение при $1 = \frac{Mv^2}{2RT}$.

$$\text{Тогда } v^2 = \frac{2RT}{M}, \quad v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2R \cdot 300}{0,004}} = \sqrt{150000R} = 100\sqrt{15R}.$$

Ответ: $100\sqrt{15R}$.