

Логарифмическая функция

1. Исследование логарифмической функции без производной
2. Исследование функций,
содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

1. Исследование логарифмической функции без производной

■ Примеры

№1. Найдите точку минимума функции $y = \log_8(x^2 + 2x + 30) + 10$.

№2. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(242 - 2x - x^2) + 3$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

Решение (примеры)

№1. Найдите точку минимума функции $y = \log_8(x^2 + 2x + 30) + 10$.

Решение:

Возрастающая на $D(y) = \mathbb{R}$ функция

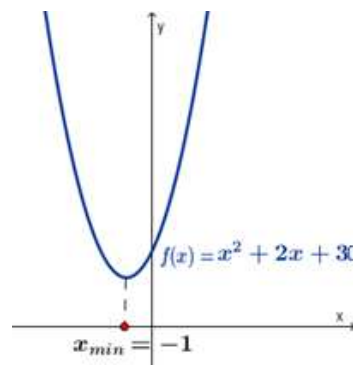
$y = \log_8 f(x) + 10$ имеет сложный аргумент

$f(x) = x^2 + 2x + 30$. Функция $f(x)$ -

квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_{\text{г}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Точка минимума аргумента является точкой минимума и для самой функции.



$$x_{\min} = -1 \rightarrow f_{\min}(-1) \rightarrow y_{\min} = \log_8 f_{\min}(-1) + 10$$

Ответ: -1.

№2. Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y = \log_2 f(x) - 2$ имеет сложный аргумент

$f(x) = 2 + 2x - x^2$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_{\text{г}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой функции.

$$x_{\max} = 1 \rightarrow f_{\max}(1) \rightarrow y_{\max} = \log_2 f_{\max}(1) - 2.$$

Ответ: 1.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(242 - 2x - x^2) + 3$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y = \log_3 f(x) + 3$ имеет сложный аргумент $f(x) = 242 - 2x - x^2$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_{\text{г}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = -1.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. В точке максимума аргумент принимает наибольшее значение, и заданная функция принимает наибольшее значение в этой же точке.

$$x_{\max} = -1 \rightarrow f_{\max}(-1) = 242 - 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = 242 + 2 - 1 = 243 = 3^5$$

$$y_{\max} = y_{\text{наиб}} = y(-1) = \log_3 3^5 + 3 = 5 + 3 = 8$$

Ответ: 8.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y = \log_3 f(x) + 2$ имеет сложный аргумент $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_{\text{г}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В точке минимума аргумент принимает наименьшее значение, и заданная функция принимает наименьшее значение в этой же точке.

$$x_{\min} = 3 \rightarrow f_{\min}(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$$

$$y_{\text{наим}} = y_{\min} = \log_3 f_{\min}(3) + 2 = \log_3 1 + 2 = 0 + 2 = 2$$

Ответ: 2.

Тест 1. Исследование логарифмической функций без производной

№1. Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 - 30x + 249) + 8$.

№2. Найдите точку максимума функции $y = \log_7(-80 - 20x - x^2) - 8$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_2(503 - 6x - x^2) - 3$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_6(x^2 - 18x + 117) - 6$.

Ответы (тест) 1. Исследование логарифмической функций без производной

№1	№2	№3	№4
15	-10	6	-4

2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной

■ Примеры

№1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x-13) - 2x + 7$.

№2. Найдите точку минимума функции $y = 7x - 7\ln(x+9) + 6$.

№3. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

№4. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$.

№5. Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6, 5; 0]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

№7. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(x+8)^4$ на отрезке $[-7, 5; 0]$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^2 - 13x + 7\ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

Решение (примеры)

№1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x-13) - 2x + 7$.

Решение:

1) $D(y) = (13; \infty)$

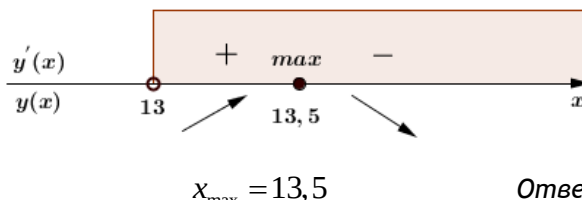
2) $y' = 0, x = 13,5$

$$y' = \frac{1}{x-13} - 2$$

$$y' = \frac{1-2x+26}{x-13} = \frac{-2x+27}{x-13}$$

$$y' = -\frac{2(x-13,5)}{x-13}$$

3)



$$x_{\max} = 13,5$$

Ответ: 13,5.

№2. Найдите точку минимума функции $y = 7x - 7\ln(x+9) + 6$.

Решение:

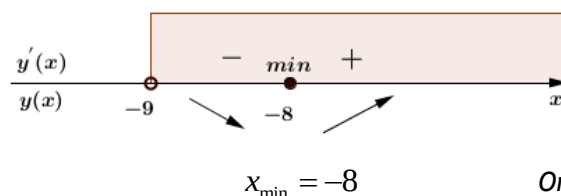
1) $D(y) = (-9; \infty)$

2) $y' = 0, x = -8$

$$y' = 7 - \frac{7}{x+9} = 7\left(1 - \frac{1}{x+9}\right)$$

$$y' = 7 \cdot \frac{x+9-1}{x+9} = 7 \cdot \frac{x+8}{x+9}$$

3)



$$x_{\min} = -8$$

Ответ: -8.

№3. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Решение:

1) $D(y) = (0; \infty)$

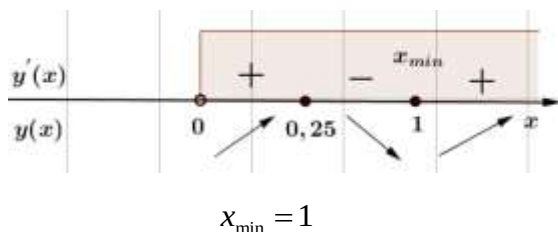
2) $y' = 0, x = 1 \quad x = 0,25$

$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x}$$

$$y' = \frac{4(x-1)(x-0,25)}{x}$$

3)



$$x_{\min} = 1$$

Ответ: 1.

№4. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$.

Решение:

1) $D(y) = (-5; \infty)$

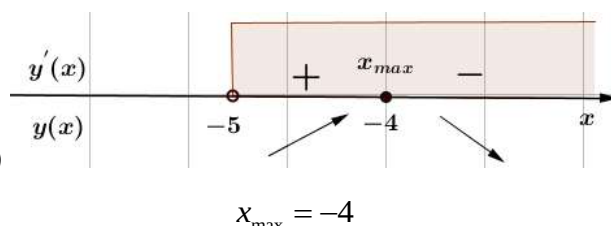
2) $y' = 0, x = -4$.

$$y = 5\ln(x+5) - 5x$$

$$y' = \frac{5}{x+5} - 5$$

$$y' = \frac{-5(x+4)}{x+5}$$

3)



$$x_{\max} = -4$$

Ответ: -4.

№5. Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6,5; 0]$.

Решение:

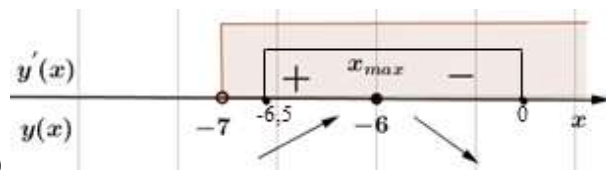
1) $D(y) = (-7; \infty)$

$$y' = \frac{8}{x+7} - 8$$

$$y' = \frac{-8(x+6)}{x+7}$$

2) $y' = 0, \quad x = -6.$

3)



$$y_{\text{наиб}} = y_{\text{max}} = y(-6) = 8\ln(-6+7) - 8 \cdot (-6) + 3 = 48 + 3 = 51$$

Ответ: 51.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Решение:

1) $D(y) = (0; \infty)$

$$y = 9x - (\ln 9 + \ln x) + 3$$

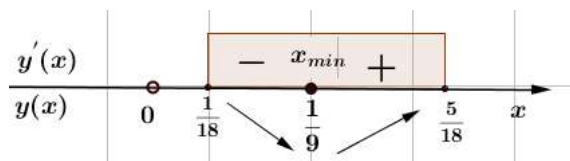
$$y = 9x - \ln 9 - \ln x + 3$$

$$y' = 9 - \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{9x-1}{x}$$

2) $y' = 0, \quad x = \frac{1}{9}.$

3)



$$y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = y\left(\frac{1}{9}\right) = 9 \cdot \frac{1}{9} - \ln\left(9 \cdot \frac{1}{9}\right) + 3 = 1 - 0 + 3 = 4$$

Ответ: 4.

№7. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(x+8)^4$ на отрезке $[-7,5; 0]$.

Решение:

1) $D(y) = (-8; \infty)$

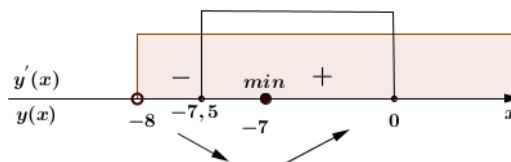
$$y = 4x - 4\ln(x+8)$$

$$y' = 4 - \frac{4}{x+8}$$

$$y' = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x+8}\right) = 4 \cdot \frac{x+7}{x+8}$$

2) $y' = 0, \quad x = -7.$

3)



$$y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = y(-7) = 4 \cdot (-7) - \ln(-7+8) = -28 - 0 = -28$$

Ответ: -28.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^2 - 13x + 7\ln x + 5$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

Решение:

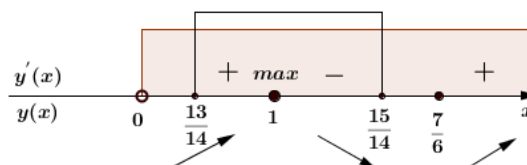
1) $D(y) = (0; \infty)$

$$y' = 6x - 13 + \frac{7}{x}$$

$$y' = \frac{6x^2 - 13x + 7}{x} = \frac{6\left(x - \frac{7}{6}\right)(x-1)}{x}$$

2) $y' = 0, \quad x = \frac{7}{6}, \quad x = 1.$

3)



$$y_{\text{наиб}} = y_{\text{max}} = y(1) = 3 - 13 + 7 \cdot \ln 1 + 5 = -10 + 5 = -5$$

Ответ: -5.

Тест**2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной**

№1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x-12) - 10x + 11$.

№2. Найдите точку минимума функции $y = 4x - \ln(x+5) + 8$.

№3. Найдите точку минимума функции $y = 0,5x^2 - 16x + 63\ln x - 2$.

№4. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+17)^{11} - 11x + 9$.

№5. Найдите наибольшее значение функции $y = 9\ln(x+8) - 9x + 12$ на отрезке $[-7, 5; 0]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - \ln(12x) + 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{24}; \frac{5}{24}\right]$.

№7. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(x+7)^2$ на отрезке $[-6, 5; 0]$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 9x + 5\ln x + 3$ на отрезке $\left[\frac{9}{10}; \frac{11}{10}\right]$.

Ответы (тест)**2. Исследование функций, содержащих логарифмическую функцию, с помощью производной**

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
12,1	-4,75	9	-16	75	5	-12	-4