

Показательная функция

1. Исследование показательной функции без производной
2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

1. Исследование показательной функции без производной

■ Примеры

№1. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2+2x+3}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y = 9^{-31+14x-x^2}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-116-22x-x^2}$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = 6^{x^2+16x+66}$.

Решение (примеры)

№1. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2+2x+3}$.

Решение:

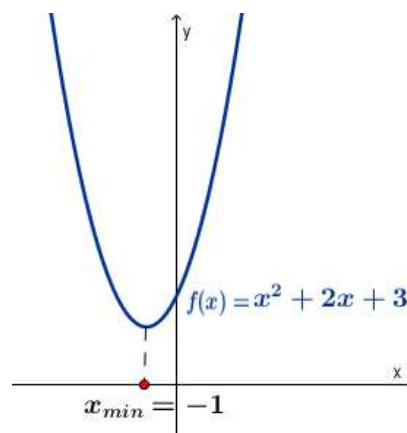
Возрастающая на $D(y)$ функция $y = 7^{f(x)}$

имеет сложный аргумент $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_{\text{с}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Точка минимума аргумента является точкой минимума и для самой функции.



$$x_{\min} = -1 \rightarrow f_{\min}(-1) \rightarrow y_{\min} = 7^{f_{\min}(-1)}$$

Ответ: -1.

№2. Найдите точку максимума функции $y = 9^{-31+14x-x^2}$.

Решение:

Показательная функция с основанием больше 1 $y = 9^{f(x)}$ - возрастающая и, поэтому большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Показательная функция имеет сложный аргумент - квадратичную функцию $f(x) = -31 + 14x - x^2$. Графиком функции $f(x)$ является парабола с ветвями, направленными вниз. Единственный экстремум - это максимум, который достигается в вершине: $x_{\text{с}} = x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2 \cdot (-1)} = 7$. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой показательной функции.

Ответ: 7.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-116-22x-x^2}$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y = 2^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x) = -116 - 22x - x^2$.

Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает максимума в вершине

$$x_{\text{с}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-22}{-2} = -11.$$

Из определения возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции. В точке максимума аргумент принимает наибольшее значение, и заданная функция принимает наибольшее значение в этой же точке.

$$x_{\max} = -11 \rightarrow f_{\max}(-11) = -116 - 22 \cdot (-11) - (-11)^2 = -116 - 11 \cdot (-22 + 11) = 5$$

$$y_{\max} = 2^{f_{\max}(-11)} = 2^5 = 32$$

Ответ: 32.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = 6^{x^2+16x+66}$.

Решение:

Возрастающая на $D(y)$ функция $y = 6^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x) = x^2 + 16x + 66$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_{\text{с}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2} = -8.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В точке минимума аргумент принимает наименьшее значение, и заданная функция принимает наименьшее значение в этой же точке.

$$x_{\min} = -8 \rightarrow f_{\min}(-8) = (-8)^2 + 16 \cdot (-8) + 66 = 64 - 128 + 66 = 2$$

$$y_{\min} = 6^{f_{\min}(-8)} = 6^2 = 36$$

Ответ: 36.

■ Тест 1. Исследование показательной функций без производной

№1. Найдите точку минимума функции $y = 9^{x^2+26x+193}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y = 8^{-30+12x-x^2}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{-139-24x-x^2}$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2+30x+229}$.

■ Ответы (тест) 1. Исследование показательной функций без производной

№1	№2	№3	№4
-13	6	243	625

2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

■ Примеры

№1. Найдите точку максимума функции $y = (9 - x)e^{x+9}$.

№2. Найдите точку минимума функции $y = (3 - x)e^{3-x}$.

№3. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

№4. Найдите наибольшее значение функции $y = (8 - x)e^{x-7}$ на отрезке $[3; 10]$.

№5. Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10}$ на отрезке $[8; 11]$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 23)^2 e^{x-23}$ на отрезке $[21, 5; 27]$.

№7. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 10)^2 e^{-8-x}$ на отрезке $[-9; -7]$.

№8. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 2e^x + 9$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение (примеры)

№1. Найдите точку максимума функции $y = (9 - x)e^{x+9}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (9 - x)' \cdot e^{x+9} + (9 - x) \cdot (e^{x+9})'$$

$$y' = -e^{x+9} + (9 - x) \cdot e^{x+9} \cdot (x + 9)'$$

$$y' = -e^{x+9} + (9 - x) \cdot e^{x+9}$$

$$y' = e^{x+9} \cdot (-1 + 9 - x)$$

$$y' = e^{x+9} \cdot (-x + 8)$$

$$y' = -e^{x+9} \cdot (x - 8)$$

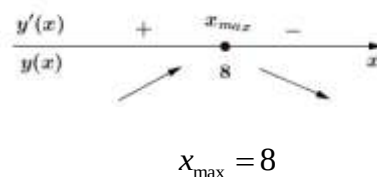
2) $y' = 0$

$$-e^{x+9} \cdot (x - 8) = 0$$

$$e^{x+9} = 0 \quad x - 8 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 8$$

3)



Ответ: 8.

№2. Найдите точку минимума функции $y = (3 - x)e^{3-x}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (3 - x)' \cdot e^{3-x} + (3 - x) \cdot (e^{3-x})'$$

$$y' = -e^{3-x} + (3 - x) \cdot e^{3-x} \cdot (3 - x)'$$

$$y' = -e^{3-x} - (3 - x) \cdot e^{3-x}$$

$$y' = e^{3-x} \cdot (-1 - 3 + x)$$

$$y' = e^{3-x} \cdot (x - 4)$$

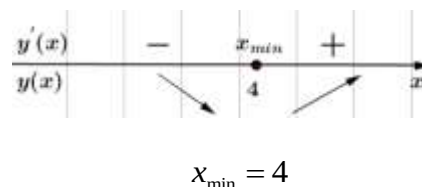
2) $y' = 0$

$$e^{3-x} \cdot (x - 4) = 0$$

$$e^{3-x} = 0 \quad x - 4 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 4$$

3)



Ответ: 4.

№3. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (x^2 - 10x + 10)' \cdot e^{5-x} + (x^2 - 10x + 10) \cdot (e^{5-x})'$$

$$y' = (2x - 10)e^{5-x} + (x^2 - 10x + 10) \cdot e^{5-x} \cdot (5 - x)'$$

$$y' = (2x - 10)e^{5-x} - (x^2 - 10x + 10) \cdot e^{5-x}$$

$$y' = e^{5-x} \cdot (2x - 10 - x^2 + 10x - 10)$$

$$y' = e^{5-x} \cdot (-x^2 + 12x - 20)$$

$$y' = -e^{5-x} \cdot (x^2 - 12x + 20)$$

$$y' = -e^{5-x} \cdot (x - 10)(x - 2)$$

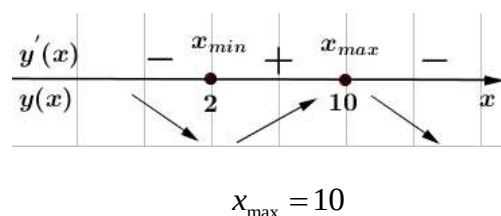
2) $y' = 0$

$$-e^{5-x} \cdot (x - 10)(x - 2) = 0$$

$$e^{5-x} = 0 \quad x - 10 = 0 \quad x - 2 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 10 \quad x = 2$$

3)



Ответ: 10.

№4. Найдите наибольшее значение функции $y = (8-x)e^{x-7}$ на отрезке $[3;10]$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

2) $y' = 0$

3)

$$y' = (8-x)' \cdot e^{x-7} + (8-x) \cdot (e^{x-7})'$$

$$-e^{x-7} \cdot (x-7) = 0$$

$$y' = -e^{x-7} + (8-x) \cdot e^{x-7} \cdot (x-7)'$$

$$e^{x-7} = 0 \quad x-7 = 0$$

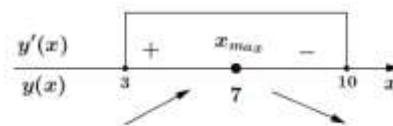
$$y' = -e^{x-7} + (8-x) \cdot e^{x-7}$$

$$\emptyset \quad x = 7$$

$$y' = e^{x-7} \cdot (-1+8-x)$$

$$y' = e^{x-7} \cdot (-x+7)$$

$$y' = -e^{x-7} \cdot (x-7)$$



$$y_{\text{наиб}} = y(x_{\text{max}}) = (8-7) \cdot e^{7-7} = 1$$

Ответ: 1.

№5. Найдите наименьшее значение функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-10}$ на отрезке $[8;11]$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (3x^2 - 36x + 36)' \cdot e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36) \cdot (e^{x-10})'$$

$$y' = (6x - 36)e^{x-10} + (3x^2 - 36x + 36) \cdot e^{x-10}$$

$$y' = e^{x-10} \cdot (6x - 36 + 3x^2 - 36x + 36)$$

$$y' = e^{x-10} \cdot (3x^2 - 30x)$$

$$y' = 3x(x-10)e^{x-10}$$

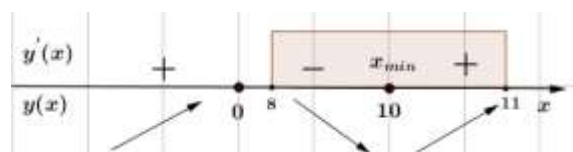
2) $y' = 0$

$$3x(x-10)e^{x-10} = 0$$

$$x = 0 \quad x - 10 = 0 \quad e^{x-10} = 0$$

$$x = 10 \quad \emptyset$$

3)



$$y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = y(10) = (3 \cdot 10^2 - 36 \cdot 10 + 36) \cdot e^{10-10} = -24$$

Ответ: -24.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-23)^2 e^{x-23}$ на отрезке $[21,5;27]$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = ((x-23)^2)' \cdot e^{x-23} + (x-23)^2 \cdot (e^{x-23})'$$

$$y' = 2(x-23) \cdot (x-23)' \cdot e^{x-23} + (x-23)^2 \cdot e^{x-23} \cdot (x-23)'$$

$$y' = 2(x-23)e^{x-23} + (x-23)^2 \cdot e^{x-23}$$

$$y' = e^{x-23} \cdot (x-23)(2+x-23)$$

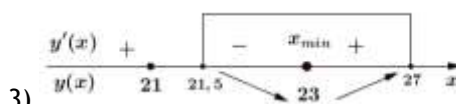
$$y' = e^{x-23} \cdot (x-23)(x-21)$$

2) $y' = 0$

$$e^{x-23} \cdot (x-23)(x-21) = 0$$

$$e^{x-23} = 0 \quad x-23 = 0 \quad x-21 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 23 \quad x = 21$$



3)

$$y_{\text{наим}} = y(x_{\text{min}}) = y(23) = (23-23)^2 e^{23-23} = 0$$

Ответ: 0.

№7. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+10)^2 e^{-8-x}$ на отрезке $[-9; -7]$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = ((x+10)^2)' \cdot e^{-8-x} + (x+10)^2 \cdot (e^{-8-x})'$$

$$y' = 2(x+10) \cdot (x+10)' \cdot e^{-8-x} + (x+10)^2 \cdot e^{-8-x} \cdot (-8-x)'$$

$$y' = 2(x+10)e^{-8-x} - (x+10)^2 \cdot e^{-8-x}$$

$$y' = e^{-8-x} \cdot (x+10)(2-x-10)$$

$$y' = e^{-8-x} \cdot (x+10)(-x-8)$$

$$y' = -e^{-8-x} \cdot (x+10)(x+8)$$

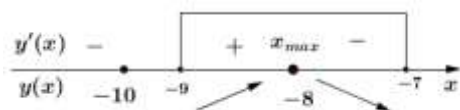
2) $y' = 0$

$$-e^{-8-x} \cdot (x+10)(x+8) = 0$$

$$e^{-8-x} = 0 \quad x+10 = 0 \quad x+8 = 0$$

$$\emptyset \quad x = -10 \quad x = -8$$

3)



$$y_{\text{наиб}} = y(x_{\text{max}}) = y(-8) =$$

$$= (-8+10)^2 e^{-8-(-8)} = 4$$

Ответ: 4.

№8. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 2e^x + 9$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение:

I способ.

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (e^{2x})' - (2e^x)'$$

$$y' = e^{2x} \cdot (2x)' - 2e^x$$

$$y' = 2e^{2x} - 2e^x$$

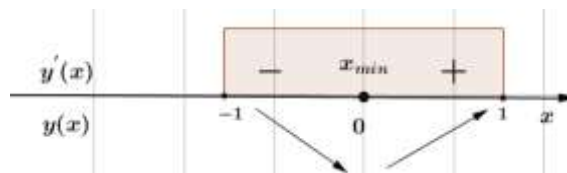
$$y' = 2e^x(e^x - 1)$$

2) $y' = 0, 2e^x(e^x - 1) = 0$

$$e^x = 0 \quad e^x - 1 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 0$$

3)



$$y_{\text{наим}} = y_{\text{min}} = y(0) = e^0 - 2e^0 + 9 = 1 - 2 + 9 = 8$$

II способ.

Пусть $e^x = t$ и т.к. $-1 \leq x \leq 1$, то $e^{-1} \leq t \leq e^1$, $t \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$.

Исходная функция примет вид квадратичной функции $y = t^2 - 2t + 9$, которая имеет единственный экстремум в вершине, а именно: $t_{\text{min}} = -\frac{-2}{2} = 1$ и $1 \in \left[\frac{1}{e}; e\right]$. Тогда на заданном отрезке функция принимает наименьшее значение в точке минимума $y_{\text{min}} = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 9 = 8$.

Ответ: 8.

■ **Тест** 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

№1. Найдите точку максимума функции $y = (x + 18)e^{18-x}$.

№2. Найдите точку максимума функции $y = (x - 7)^2 e^{x-8}$.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 6)^2 e^{-x-4}$ на отрезке $[-6; -1]$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 14e^x - 1$ на отрезке $[1; 2]$.

№5. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 27x + 27) \cdot e^{x-9}$.

№6. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 - 47x + 47)e^{47-x}$ на отрезке $[43; 52]$.

■ **Ответы (тест)** 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной

№1	№2	№3	№4	№5	№6
-17	5	4	-50	7	47

■ **Решение (тест) 2. Исследование функций, содержащих показательную функцию, с помощью производной**

№1. Найдите точку максимума функции $y = (x+18)e^{18-x}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (x+18)' \cdot e^{18-x} + (x+18) \cdot (e^{18-x})'$$

$$y' = e^{18-x} + (x+18) \cdot e^{18-x} \cdot (18-x)'$$

$$y' = e^{18-x} - (x+18) \cdot e^{18-x}$$

$$y' = e^{18-x} \cdot (1-x-18)$$

$$y' = -e^{18-x} \cdot (x+17)$$

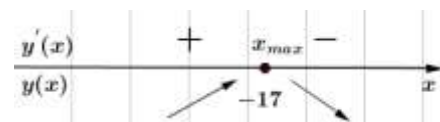
2) $y' = 0$

$$-e^{18-x} \cdot (x+17) = 0$$

$$e^{18-x} = 0 \quad x+17 = 0$$

$$\emptyset \quad x = -17$$

3)



$$x_{\max} = -17$$

Ответ: -17.

№2. Найдите точку максимума функции $y = (x-7)^2 e^{x-8}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = ((x-7)^2)' \cdot e^{x-8} + (x-7)^2 \cdot (e^{x-8})'$$

$$y' = 2(x-7)e^{x-8} + (x-7)^2 \cdot e^{x-8}$$

$$y' = e^{x-8} \cdot (x-7) \cdot (2+x-7)$$

$$y' = e^{x-8} \cdot (x-7) \cdot (x-5)$$

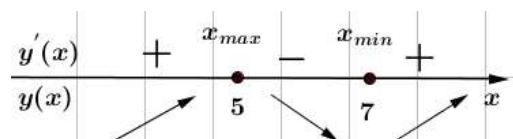
2) $y' = 0$

$$e^{x-8} \cdot (x-7)(x-5) = 0$$

$$e^{x-8} = 0 \quad x-7 = 0 \quad x-5 = 0$$

$$\emptyset \quad x = 7 \quad x = 5$$

3)



$$x_{\max} = 5$$

Ответ: 5.

№3. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+6)^2 e^{-x-4}$ на отрезке $[-6; -1]$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = ((x+6)^2)' \cdot e^{-x-4} + (x+6)^2 \cdot (e^{-x-4})'$$

$$y' = 2(x+6)e^{-x-4} + (x+6)^2 \cdot e^{-x-4} \cdot (-x-4)'$$

$$y' = 2(x+6)e^{-x-4} - (x+6)^2 \cdot e^{-x-4}$$

$$y' = e^{-x-4} \cdot (x+6) \cdot (2-x-6)$$

$$y' = -e^{-x-4} \cdot (x+6) \cdot (x+4)$$

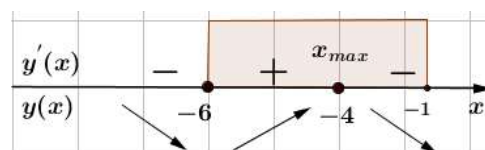
2) $y' = 0$

$$-e^{-x-4} \cdot (x+6)(x+4) = 0$$

$$e^{-x-4} = 0 \quad x+6 = 0 \quad x+4 = 0$$

$$\emptyset \quad x = -6 \quad x = -4$$

3)



$$y_{\text{наиб}} = y_{\max} = y(-4) = (-4+6)^2 e^{-(-4)-4} = 4$$

Ответ: 4.

№4. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 14e^x - 1$ на отрезке $[1; 2]$.

Решение:

Пусть $e^x = t$ и т.к. $-1 \leq x \leq 1$, то $e^1 \leq t \leq e^2$, $t \in [e; e^2]$.

Исходная функция примет вид квадратичной функции $y = t^2 - 14t - 1$, которая имеет единственный экстремум в вершине, а именно: $t_{\min} = -\frac{-14}{2} = 7$ и $7 \in [e; e^2]$. Тогда на заданном отрезке функция принимает наименьшее значение в точке минимума $y_{\min} = y(7) = 7^2 - 14 \cdot 7 - 1 = -50$.

Ответ: -50.