

Иррациональные и степенные функции

■ Примеры

№1. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-79 - 18x - x^2}$.

№2. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 185}$.

№3. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 9$.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 9x + 19$ на отрезке $[1; 407]$.

№5. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

№6. Найдите наибольшее значение функции $y = 20 + 18x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[2; 111]$.

№7. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

№8. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 30x + 18$ на отрезке $[0; 400]$.

№9. Найдите точку минимума $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.

№10. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 6x + 72$ на отрезке $[5; 582]$.

№11. Найдите точку максимума $y = 12 + 12x - 2x\sqrt{x}$.

№12. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 + 3x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 9, 25]$.

№13. Найдите точку максимума $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 7x + 18$.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16$ на отрезке $[323; 326]$.

Решение (примеры)

№1. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{-79 - 18x - x^2}$.

Решение:

Функция $y = \sqrt{f(x)}$ возрастает на всей своей области определения, и ее поведение определяет поведение сложного аргумента $f(x) = -79 - 18x - x^2$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вниз, достигает своего максимума в вершине $x_0 = -\frac{-18}{-2} = -9$. Из свойства возрастающей функции: большему значению аргумента соответствует большее значение функции, имеем $y_{\max} = y(-9)$. Точка максимума аргумента является точкой максимума и для самой функции.

Ответ: -9.

№2. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 185}$.

Решение:

Функция $y = \sqrt{f(x)}$ возрастает на всей своей области определения, и ее поведение определяет поведение сложного аргумента $f(x) = x^2 + 8x + 185$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает своего минимума в вершине $x_0 = -\frac{8}{2} = -4$. Точкой минимума функции является точка минимума аргумента $x_{\min} = -4$. Т.к. это единственный экстремум функции, то в нем функция и будет принимать наименьшее значение, а именно

$$y(-4) = \sqrt{(-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 185} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.

№3. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 9$.

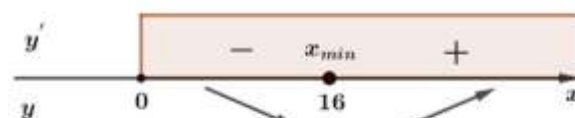
Решение:

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 9; D(y) = [0; \infty)$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 6 = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6 = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 4)$$

$$y' = 0, \sqrt{x} - 4 = 0, \sqrt{x} = 4, x = 16$$

$$x_{\min} = 16$$



Ответ: 16.

№4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 9x + 19$ на отрезке $[1; 407]$

Решение:

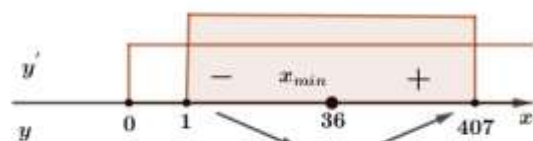
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 9x + 19; D(y) = [0; \infty)$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 9 = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 9 = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 6)$$

$$y' = 0, \sqrt{x} - 6 = 0, \sqrt{x} = 6, x = 36$$

$$x_{\min} = 36,$$

$$y_{\min. [1; 407]} = y(36) = 36^{\frac{3}{2}} - 9 \cdot 36 + 19 = (6^2)^{\frac{3}{2}} - 9 \cdot 6^2 + 19 = -89$$



Ответ: -89.

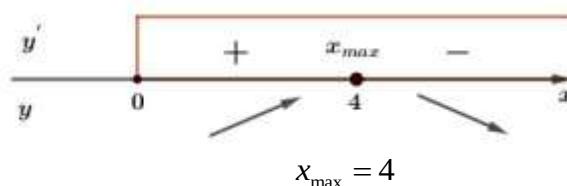
№5. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Решение:

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}; D(y) = [0; \infty)$$

$$y' = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x} = 3(2 - \sqrt{x})$$

$$y' = 0, 2 - \sqrt{x} = 0, \sqrt{x} = 2, x = 4$$



Ответ: 4.

№6. Найдите наибольшее значение функции $y = 20 + 18x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[2; 111]$.

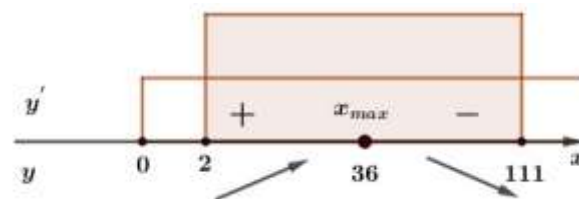
Решение:

$$y = 20 + 18x - 2x^{\frac{3}{2}}; D(y) = [0; \infty)$$

$$y' = 18 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 18 - 3x^{\frac{1}{2}} = 18 - 3\sqrt{x} = 3(6 - \sqrt{x})$$

$$y' = 0, 6 - \sqrt{x} = 0, \sqrt{x} = 6, x = 36$$

$$x_{\max} = 36$$



$$y_{\text{наиб}} = y(36) = 20 + 18 \cdot 36 - 2 \cdot 36^{\frac{3}{2}} = 20 + 3 \cdot 6^3 = 20 + 216 = 236$$

Ответ: 236.

№7. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

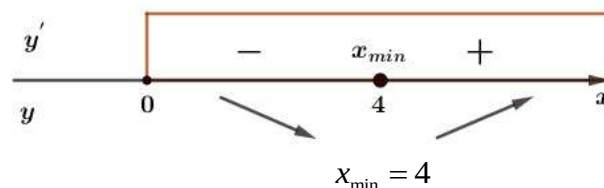
Решение:

$$y = x\sqrt{x} - 3x + 1; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = x\sqrt{x} - 3x + 1 = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2} (\sqrt{x} - 2)$$

$$y' = 0; \sqrt{x} - 2 = 0, x = 4$$



Ответ: 4.

№8. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 30x + 18$ на отрезке $[0; 400]$.

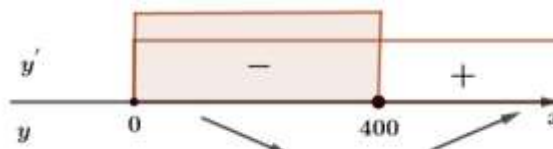
Решение:

$$y = x\sqrt{x} - 30x + 18; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = x\sqrt{x} - 30x + 18 = x^{\frac{3}{2}} - 30x + 18$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 30 = \frac{3}{2} (\sqrt{x} - 20)$$

$$y' = 0; \sqrt{x} - 20 = 0, x = 400$$



$$y_{\text{наим}} = y(400) = 400 \cdot \sqrt{400} - 30 \cdot 400 + 18 = -4000 + 18 = -3982$$

Ответ: -3982.

№9. Найдите точку минимума $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.

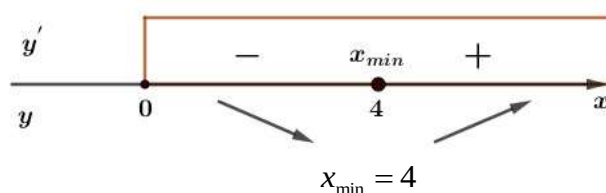
Решение:

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$$

$$y' = x^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{x} - 2$$

$$y' = 0; \sqrt{x} - 2 = 0, x = 4$$



Ответ: 4.

№10. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 6x + 72$ на отрезке $[5; 582]$.

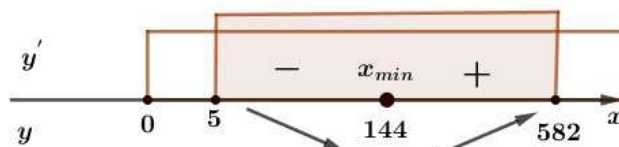
Решение:

$$y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 6x + 72; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 6x + 72 = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x + 72$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 12)$$

$$y' = 0; \sqrt{x} - 12 = 0, x = 144$$



$$y_{\text{наим}} = y(144) = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot \sqrt{144} - 6 \cdot 144 + 72 = 48 \cdot 12 - 6 \cdot 12^2 + 72 = 4 \cdot 12^2 - 6 \cdot 12^2 + 72 = -288 + 72 = -216$$

Ответ: -216.

№11. Найдите точку максимума $y = 12 + 12x - 2x\sqrt{x}$.

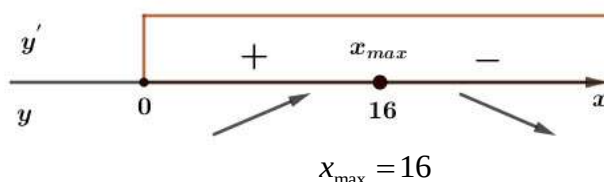
Решение:

$$y = 12 + 12x - 2x\sqrt{x}; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = 12 + 12x - 2x\sqrt{x} = 12 + 12x - 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = 12 - 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 12 - 3x^{\frac{1}{2}} = 3(4 - \sqrt{x})$$

$$y' = 0; 4 - \sqrt{x} = 0, x = 16$$



Ответ: 16.

№12. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 + 3x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 9,25]$.

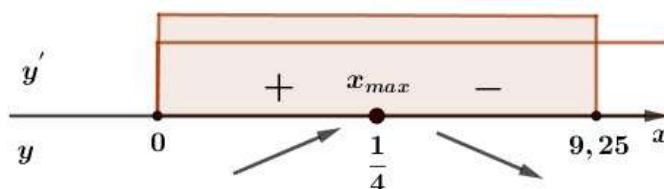
Решение:

$$y = 2 + 3x - 4x\sqrt{x}; D(y) = [0; \infty)$$

$$y = 2 + 3x - 4x\sqrt{x} = 2 + 3x - 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = 3 - 4 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3 - 6x^{\frac{1}{2}} = 3(1 - 2\sqrt{x})$$

$$y' = 0; 1 - 2\sqrt{x} = 0, x = \frac{1}{4}$$



$$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{1}{4}\right) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2,25$$

Ответ: 2,25.

№13. Найдите точку максимума $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 7x + 18$.

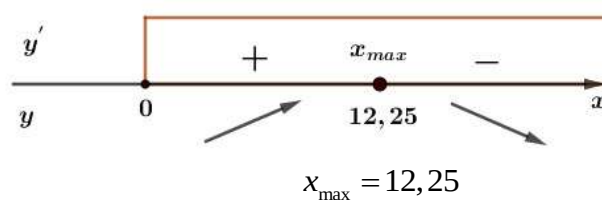
Решение:

$$y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 7x + 18; \quad y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16$$

$$y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 7x + 18 = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 7x + 18$$

$$y' = -2x^{\frac{1}{2}} + 7 = 7 - 2\sqrt{x}$$

$$y' = 0; \quad 7 - 2\sqrt{x} = 0, \quad \sqrt{x} = \frac{7}{2}, \quad x = \frac{49}{4}, \quad x = 12,25$$



Ответ: 12,25.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16$ на отрезке $[323; 326]$.

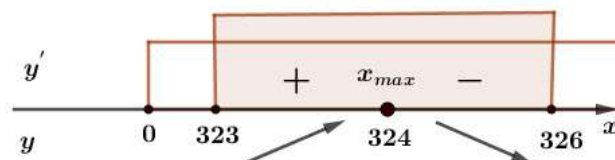
Решение:

$$y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16; \quad y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16$$

$$y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 9x + 16 = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 9x + 16$$

$$y' = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 9 = 9 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$y' = 0; \quad 9 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0, \quad \sqrt{x} = 18, \quad x = 324$$



$$\begin{aligned} y_{\text{наиб}}_{[323;326]} &= y(324) = -\frac{1}{3} \cdot 324 \cdot \sqrt{324} + 9 \cdot 324 + 16 = \\ &= -6 \cdot 18^2 + 9 \cdot 18^2 + 16 = 3 \cdot 324 + 16 = 988 \end{aligned}$$

Ответ: 988.

Тест Исследование иррациональных и степенных функций

№1. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{13 + 6x - x^2}$.

№2. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 20x + 104}$.

№3. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 73}$.

№4. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{168 - 22x - x^2}$.

№5. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 30x + 13$.

№6. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 5$ на отрезке $[3; 408]$.

№7. Найдите точку максимума функции $y = 17 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

№8. Найдите наибольшее значение функции $y = 9 + 33x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[1; 166]$.

№9. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 18x + 29$.

№10. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 24$ на отрезке $[1; 256]$.

№11. Найдите точку минимума $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 7x + 6$.

№12. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 3x + 86$ на отрезке $[0; 582]$.

№13. Найдите точку максимума $y = 17 + 15x - 4x\sqrt{x}$.

№14. Найдите наибольшее значение функции $y = 3 + 33x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[119; 131]$.

№15. Найдите точку максимума $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 8x + 6$.

№16. Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 12x + 6$ на отрезке $[33; 37]$.

▪ **Ответы (тест)** Исследование рациональных функций

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
3	-10	8	17	400	-1367	25	1340
№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15	№16
144	-2024	12,25	50	6,25	1334	64	150