

Дисперсия и стандартное отклонение

■ Примеры

№1. Случайная величина Z распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Найдите дисперсию случайной величины Z .

№2. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно ее распределение: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}$.

№3. Случайная величина Z распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Найдите дисперсию случайной величины Z .

№4. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно ее распределение: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

№5. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется распределению $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

№6. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется распределению $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

№7. Найдите стандартное отклонение случайной величины, имеющей распределение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

№8. Про случайную величину X известно, что $E(X) = 4$ и $D(X) = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ », которую дает неравенство Чебышёва.

№9. Про случайную величину X известно, что $E(X) = 4$ и $D(X) = 10$. Найдите нижнюю оценку вероятности события « $0 < X < 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

- №10. Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,4 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,8 мм».
-
- №11. Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от среднего более чем на 0,75 мм».
-
- №12. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 1,4 1,2 1,3 1,4 и 1,2.
По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.
-
- №13. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 520, 420, 440, 500, 520, 560, 520, 520, 560, 580 и 580 рублей.
По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.
-
- №14. При выборочном обследовании жителей города А. 12 из 24 респондентов ответили «Нет» на вопрос, понравился ли им новый торговый центр. Найдите интервальную оценку доли горожан, которым торговый центр не понравился, пользуясь правилом «частота плюс-минус одно стандартное отклонение». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.
-
- №15. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 12 из 36 случайных респондентов ответили «Нет» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, не имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус два стандартных отклонения». В ответе запишите длину доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Решение (примеры)

№1. Случайная величина Z распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Найдите дисперсию случайной величины Z .

Значения случайной величины Z	0	1	Математическое ожидание случайной величины Z : $E(Z) = 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,3 = 0,3$
Вероятность P	0,7	0,3	
Значения отклонения Z от ее математического ожидания: $(Z - E(Z))$	$0 - 0,3 = -0,3$	$1 - 0,3 = 0,7$	Дисперсия случайной величины Z : $D(Z) = E(Z - E(Z))^2 = 0,09 \cdot 0,7 + 0,49 \cdot 0,3 = 0,063 + 0,147 = 0,21$ Ответ: 0,21.
Значения квадрата отклонения Z от ее математического ожидания: $(Z - E(Z))^2$	$(-0,3)^2 = 0,09$	$0,7^2 = 0,49$	
Вероятность P	0,7	0,3	

№2. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно ее распределение

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Значения случайной величины X	1	3	5	Математическое ожидание случайной величины X : $E(X) = 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,1 = 3$
Вероятность P	0,1	0,8	0,1	
Значения отклонения X от ее математического ожидания: $(X - E(X))$	$1 - 3 = -2$	$3 - 3 = 0$	$5 - 3 = 2$	Дисперсия случайной величины X : $D(X) = E(X - E(X))^2 = 4 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,1 = 0,4 + 0,4 = 0,8$ Ответ: 0,8.
Значения квадрата отклонения X от ее математического ожидания: $(X - E(X))^2$	$(-2)^2 = 4$	$0^2 = 0$	$2^2 = 4$	
Вероятность P	0,1	0,8	0,1	

№3. Случайная величина Z распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Найдите дисперсию случайной величины Z .

Значения случайной величины Z	0	1
Значения квадрата случайной величины Z^2	0	1
Вероятность P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Математическое ожидание случайной величины Z :

$$E(Z) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}, \quad E^2(Z) = \frac{4}{25}.$$

Математическое ожидание случайной величины Z^2 :

$$E(Z^2) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Дисперсия случайной величины Z :

$$D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Ответ: 0,24.

№4. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно ее распределение: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Значения случайной величины X	1	2	3
Значения квадрата случайной величины X^2	1	4	9
Вероятность P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Математическое ожидание случайной величины X

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2, \quad E^2(X) = 4.$$

Математическое ожидание случайной величины X^2

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{2}{5} = 4,8$$

Дисперсия случайной величины X :

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4,8 - 4 = 0,8$$

Ответ: 0,8.

№5. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется распределению $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Значения случайной величины Y	0	3
Значения квадрата случайной величины Y^2	0	9
Вероятность P	0,5	0,5

Математическое ожидание случайной величины Y :

$$E(Y) = 0 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 1,5; \quad E^2(Y) = 2,25.$$

Математическое ожидание случайной величины Y^2 :

$$E(Y^2) = 0 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,5 = 4,5$$

Дисперсия случайной величины Y : $D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 4,5 - 2,25 = 2,25$

Стандартное отклонение случайной величины Y : $\sigma = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{2,25} = 1,5.$

Ответ: 1,5.

№6. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется

распределению $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Значения случайной величины Y	0	4
Значения квадрата случайной величины Y^2	0	16
Вероятность P	0,9	0,1

Математическое ожидание случайной величины Y :

$$E(Y) = 0 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,1 = 0,4; \quad E^2(Y) = 0,16.$$

Математическое ожидание случайной величины Y^2 :

$$E(Y^2) = 0 \cdot 0,9 + 16 \cdot 0,1 = 1,6$$

Дисперсия случайной величины Y : $D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1,6 - 0,16 = 1,44$

Стандартное отклонение случайной величины Y : $\sigma = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{1,44} = 1,2$.

Ответ: 1,2.

№7. Найдите стандартное отклонение случайной величины, имеющей распределение

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Значения случайной величины X	1	2	3
Значения квадрата случайной величины X^2	1	4	9
Вероятность P	0,3	0,1	0,6

Математическое ожидание случайной величины X

$$E(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 = 2,3; \quad E^2(X) = 2,3^2 = 5,29$$

Математическое ожидание случайной величины X^2

$$E(X^2) = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 = 6,1$$

Дисперсия случайной величины X : $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6,1 - 5,29 = 0,81$.

Стандартное отклонение случайной величины X : $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,81} = 0,9$.

Ответ: 0,9.

№8. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ », которую дает неравенство Чебышёва.

Математическое ожидание случайной величины -

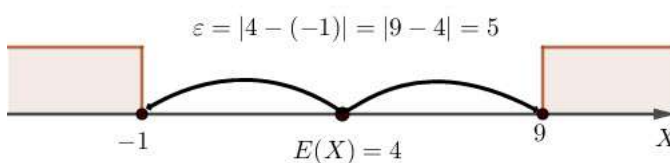
$$E(X) = 4, \text{ дисперсия } - D(X) = 10.$$

Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине больше

положительного числа ε , не больше, чем $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Оценка вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ » равна $P(|x - 4| \geq 5) \leq \frac{10}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 0,4$.

Ответ: 0,4.



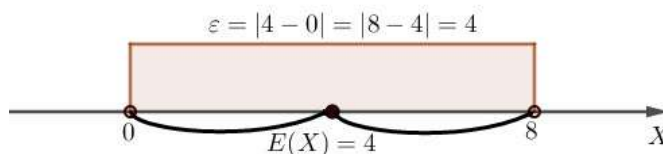
- №9. Про случайную величину X известно, что $E(X) = 4$ и $D(X) = 10$. Найдите нижнюю оценку вероятности события « $0 < X < 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

Математическое ожидание случайной величины -

$$E(X) = 4, \text{ дисперсия } - D(X) = 10.$$

Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ а именно, } P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$



Оценка вероятности события « $0 < X < 8$ » равна $P(|X - 4| < 4) \geq 1 - \frac{10}{4^2} = 1 - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Ответ: 0,375.

- №10. Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,4 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,8 мм».

Средний диаметр подшипника - $E(X) = 24$, стандартное отклонение от среднего диаметра - $\sigma = 0,4$, диаметр случайно выбранного подшипника (случайной величины X) отличается от среднего более чем на

$\varepsilon = 0,8$. Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что

$$P(|X - 24| > 0,8) \leq \frac{0,4^2}{0,8^2} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

- №11. Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от среднего более чем на 0,75 мм».

Сторона квадратной керамической плитки - $E(X) = 30$, стандартное отклонение - $\sigma = 0,6$, сторона случайно выбранной керамической плитки (случайной величины X) отличается от среднего более чем на

$\varepsilon = 0,75$. Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что

$$P(|X - 30| > 0,75) \leq \frac{0,6^2}{0,75^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3}\right)^2 = 0,8^2 = 0,64.$$

Ответ: 0,64.

- №12. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 1,4 1,2 1,3 1,4 и 1,2. По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Среднее значение выборки $E = \frac{1,4 + 1,2 + 1,3 + 1,4 + 1,2}{5} = 1,3$.

Дисперсия выборки - среднее значение квадрата отклонения значений совокупности от среднего значения

$$\text{выборки } D_{\text{выб.}} = \frac{(1,4 - 1,3)^2 + (1,2 - 1,3)^2 + (1,3 - 1,3)^2 + (1,4 - 1,3)^2 + (1,2 - 1,3)^2}{5} = \frac{4}{500}.$$

Несмещенная оценка генеральной совокупности $D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{500} = 0,01$.

Ответ: 0,01.

- №13. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 520, 420, 440, 500, 520, 560, 520, 520, 560, 580 и 580 рублей. По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.

Объем выборки $n = 11$. Среднее арифметическое всех вариантов - среднее значение выборки

$$E = \frac{420 + 440 + 500 + 4 \cdot 520 + 2 \cdot 560 + 2 \cdot 580}{11} = \frac{5720}{11} = 520.$$

Упорядоченная выборка	420	440	500	520	560	580
Частота варианты	1	1	1	4	2	2
Отклонение вариант от среднего	100	80	20	0	40	60
Квадрат отклонения	10000	6400	400	0	1600	3600

$$\text{Дисперсия } D = \frac{10000 + 6400 + 400 + 2 \cdot 1600 + 2 \cdot 3600}{11} = \frac{27200}{11}$$

$$\text{Несмещенная оценка дисперсии } D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{11}{10} \cdot \frac{27200}{11} = 2720.$$

Ответ: 2720.

- №14. При выборочном обследовании жителей города А. 12 из 24 респондентов ответили «Нет» на вопрос, понравился ли им новый торговый центр. Найдите интервальную оценку доли горожан, которым торговый центр не понравился, пользуясь правилом «частота плюс-минус одно стандартное отклонение». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Объем выборки $n = 24$, выборочная доля $\omega = \frac{12}{24} = 0,5$, число стандартного отклонения $t = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Доверительный интервал: } \omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}. \\ 0,5 - 1 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot (1-0,5)}{24}} < p < 0,5 + 1 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot (1-0,5)}{24}} \\ 0,5 - \frac{0,5}{2\sqrt{6}} < p < 0,5 + \frac{0,5}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\text{Верхняя граница доверительного интервала: } 0,5 + \frac{0,5}{2\sqrt{6}} \approx 0,5 + \frac{1}{4 \cdot 2,5} \approx 0,6.$$

Ответ: 0,6.

- №15. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 12 из 36 случайных респондентов ответили «Нет» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, не имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус два стандартных отклонения». В ответе запишите длину доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Объем выборки $n = 36$, выборочная доля $\omega = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, число стандартного отклонения $t = 2$.

$$\text{Доверительный интервал: } \omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

$$\frac{1}{3} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{36}} < p < \frac{1}{3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{36}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9} < p < \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9}$$

Длина доверительного интервала: $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} \approx 0,3.$

Ответ: 0,3.

■ Тест

№1. Случайная величина Z распределена по закону $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.
Найдите дисперсию случайной величины Z .

№2. Найдите дисперсию случайной величины X , если известно ее распределение: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$

№3. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется распределению $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

№4. Вычислите стандартное отклонение случайной величины Y , которая подчиняется распределению $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

№5. Найдите стандартное отклонение случайной величины, имеющей распределение $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$.

№6. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

№7. Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм».

№8. Известно, что средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 500 г, а стандартное отклонение от средней массы равно 40 г. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отличается от средней более чем на 75 г». Ответ округлите до тысячных.

№9. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 22, 20, 22, 20, 23, 24, 22, 24 и 21.
По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

№10. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 690, 750, 710, 770, 810, 850, 690, 850, 850, 850 и 870 рублей.
По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.

№11. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 24 из 36 случайных респондентов ответили «Да» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала.

▪ Ответы (тест)

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
0,64	2.4	1,2	1,6	0,9	0,625	0,16	0,284	2,25	4960	0,8