

Показательные уравнения или неравенства

■ Примеры

- №1. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.
-
- №2. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2 \cdot 10^2 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p – давление в газе в паскалях, V – объём газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $6,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
-
- №3. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) – давление в газе, V – объём газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 8 раз?
-
- №4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 – давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 – объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 268,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

▪ **Решение (примеры)** Показательные уравнения или неравенства

- №1. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Решение:

$$m_0 = 40, \quad T = 10, \quad m = 5$$

$$5 = 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}, \quad 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{10}}, \quad -3 = -\frac{t}{10}, \quad t = 30$$

Ответ: 30.

- №2. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2 \cdot 10^2 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p – давление в газе в паскалях, V – объём газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $6,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Решение:

$$6,25 \cdot 10^5 \cdot V^{\frac{5}{3}} = 2 \cdot 10^2, \quad 625 \cdot 10 \cdot V^{\frac{5}{3}} = 2, \quad V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5^5} \quad \uparrow^{\frac{3}{5}}, \quad V = \frac{1}{125} = 0,008$$

Ответ: 0,008.

- №3. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) – давление в газе, V – объём газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 8 раз?

Решение:

Пусть p_1 и V_1 – начальные значения, p_2 и V_2 – конечные значения давления и объёма газа.

По условию $\frac{V_1}{V_2} = 4$, а $p_2 \geq 8p_1$. Выразим из уравнения p : $p = \frac{\text{const}}{V^a}$

$$p_2 \geq 8p_1, \quad \frac{\text{const}}{V_2^a} \geq 8 \cdot \frac{\text{const}}{V_1^a}, \quad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 8, \quad 4^a \geq 8, \quad 2^{2a} \geq 2^3, \quad 2a \geq 3, \quad a \geq 1,5, \quad a_{\text{наим}} = 1,5$$

Ответ: 1,5.

- №4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 – давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 – объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 268,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах

Решение:

$$p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$$

$$1 \cdot 268,8^{1,4} = 128 \cdot V_2^{1,4}, \quad \left(\frac{268,8}{V_2}\right)^{1,4} = 128$$

$$\left(\frac{268,8}{V_2}\right)^{\frac{7}{5}} = 2^7 \quad \left| \uparrow^{\frac{5}{7}} \right.$$

$$\frac{268,8}{V_2} = 2^5, \quad V_2 = \frac{268,8}{32}, \quad V_2 = 8,4$$

Ответ: 8,4.

■ Тест

Показательные уравнения или неравенства

№1. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 100 мг. Период его полураспада составляет 2 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 12,5 мг.

№2. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $1,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

№3. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 16 раз объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 2 раза?

№4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 48 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

■ Ответы (тест)

Показательные уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4
6	0,008	0,25	1,5