

Тригонометрические уравнения или неравенства

■ Примеры

№1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

№2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 12$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,8 м на расстоянии 1 м?

№3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?

№4. Два тела массой $m = 4$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 64 джоулей?

№5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м и со скоростью течения $u = 1,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 60 с?

№6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 15 \sin \frac{\pi t}{5}$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первых двух секунд скорость движения превышала 7,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

№7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

- №9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не менее, чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

- №10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 1 \text{ м}^2$ находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $2 \cdot 10^{-4}$ В?

- №11. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

- №12. Двигаясь со скоростью $v = 4$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 100 кВт (кВт – это $\text{кН} \cdot \text{м/с}$).

- №13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 3600 нм?

- №14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,3 м/с?

- №15. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 12$ с – период колебаний, $v_0 = 1,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

■ **Решение (примеры)** Тригонометрические уравнения или неравенства

№1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в кундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение:

$$t \geq 3,6 \quad \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \geq 3,6$$

Ответ: 90.

$$\frac{2 \cdot 18 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 3,6 \Leftrightarrow \sin \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1, \quad \alpha_{\text{наим}} = 90^\circ$$

№2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 12$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,8 м на расстоянии 1 м?

Решение:

$$H = 0,8 + 1 \quad \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha) = 1,8$$

$$\frac{12^2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot 10} = 1,8 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha - \text{острый}, \quad \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

Ответ: 30.

№3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м.

Решение:

$$12,8 = \frac{16^2}{10} \sin 2\alpha, \quad \frac{128}{16^2} = \sin 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ)$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 30^\circ \\ 2\alpha = 150^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 15^\circ \\ \alpha = 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 15^\circ$$

Ответ: 15.

№4. Два тела массой $m = 4$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 64 джоулей?

Решение:

$$Q \geq 64 \quad mv^2 \sin^2 \alpha \geq 64$$

$$4 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha \geq 64 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ, \quad 2\alpha_{\text{наим}} = 60^\circ$$

Ответ: 60.

- №5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м и со скоростью течения $u = 1,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением

$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 60 с?

Решение:

$$t \leq 60 \quad \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha \leq 60 \quad \frac{90}{1,5} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \leq 60 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ, \quad \alpha_{\text{наим}} = 45^\circ \quad \text{Ответ: } 45.$$

α – острый

- №6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 15 \sin \frac{\pi t}{5}$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первых двух секунд скорость движения превышала 7,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение:

$$v(t) \geq 7,5 \quad 15 \sin \frac{\pi t}{5} \geq 7,5 \quad \sin \frac{\pi t}{5} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi t}{5} \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq t \leq \frac{25}{6}, \quad t \in \left[\frac{5}{6}; 4\frac{1}{6} \right]$$

Время из первых двух секунд $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow t \in \left[\frac{5}{6}; 2 \right]$. Время из первых двух секунд, на протяжении

которого скорость движения превышала 7,5 см/с: $2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$.

Это составляет $\frac{7}{6} : 2 = \frac{7}{12} \approx 0,583... \approx 0,58$.

Ответ: 0,58.

- №7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

Решение:

$$M \geq 0,75 \quad N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha \geq 0,75$$

$$1000 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 \cdot \sin \alpha \geq 0,75 \Leftrightarrow \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

α – острый, наим

Ответ: 30.

- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение:

$$U \geq 1, \quad U_0 \sin(\omega t + \varphi) \geq 1, \quad 2 \cdot \sin(120^\circ t + 30^\circ) \geq 1 \quad \sin(120^\circ t + 30^\circ) \geq \frac{1}{2}$$

$$30^\circ + 360^\circ n \leq 120^\circ t + 30^\circ \leq 150^\circ + 360^\circ n$$

$$360^\circ n \leq 120^\circ t \leq 120^\circ + 360^\circ n$$

$$3n \leq t \leq 1 + 3n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n = 0 \quad (\text{время из первой секунды}) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad t = 1 - 0 = 1$$

Значит, лампочка будет гореть 100% времени на протяжении первой секунды.

Ответ: 100.

- №9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не менее, чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Решение:

$$F_{\text{л}} \geq 2 \cdot 10^{-8} \quad 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin \alpha \geq 2 \cdot 10^{-8}$$

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$$

Ответ: 30.

- №10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 1$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с - постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $2 \cdot 10^{-4}$ В?

Решение:

$$\varepsilon_i \leq 2 \cdot 10^{-4} \quad 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot \cos \alpha \leq 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №11. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Решение:

$$A \geq 2000, \quad 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \geq 2000$$

$$\cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наиб}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №12. Двигаясь со скоростью $v = 4$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 100 кВт (кВт - это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).

Решение:

$$N = 100, \quad 100 = 50 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 3600 нм?

Решение:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}, \quad d \leq 3600, \quad \frac{k\lambda}{\sin \varphi} \leq 3600$$

$$(\varphi - \text{острый}, \sin \varphi > 0) \quad k = 3$$

$$3 \cdot 600 \leq 3600 \cdot \sin \varphi, \quad \sin \varphi \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ, \quad \varphi_{\text{наим}} = 30^\circ$$

Ответ: 30.

- №14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг - масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг - масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,3 м/с?

Решение:

$$u \geq 0,3 \quad \frac{m}{m+M} \cdot v \cdot \cos \alpha \geq 0,3$$

$$\frac{75}{75+325} \cdot 3,2 \cdot \cos \alpha \geq 0,3 \Leftrightarrow \cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наиб}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №15. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 12$ с - период колебаний, $v_0 = 1,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение:

$$v = 1,5 \sin \frac{2\pi \cdot 11}{12} = 1,5 \sin \frac{11\pi}{6} = 1,5 \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 1,5 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$E = \frac{0,16 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right)^2}{2} = 0,045$$

Ответ: 0,045.

■ Тест

Тригонометрические уравнения или неравенства

- №1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 13$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².
-
- №2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 8$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,6 м на расстоянии 1 м?
-
- №3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 13$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 8,45 м?
-
- №4. Два тела массой $m = 2$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 100 джоулей?
-
- №5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 49$ м и со скоростью течения $u = 0,7$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 70 с?
-
- №6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 6 \sin \frac{\pi t}{3}$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 3 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.
-
- №7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 3$ А – сила тока в рамке, $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 600$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,9 Н·м?
-
- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = -90^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

- №9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 6 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была не менее, чем $9 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.
-

- №10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 4$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 3 \cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $6 \cdot 10^{-4}$ В?
-

- №11. Трактор тащит сани с силой $F = 60$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 80$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2400 кДж?
-

- №12. Двигаясь со скоростью $v = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 40$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 60 кВт (кВт – это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).
-

- №13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 450$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1800 нм?
-

- №14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 4$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 300$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,4 м/с?
-

- №15. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 2$ с – период колебаний, $v_0 = 0,3$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 3 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

▪ **Ответы (тест)** Тригонометрические уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4	№5	№6
90	45	15	90	45	0,5
№7	№8	№9	№10	№11	№12
30	75	30	60	60	60
№13	№14	№15			
30	60	0,036			