

Дробно-рациональные уравнения или неравенства

■ Примеры

- №1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 45$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 160 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.
-
- №2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 3$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 5% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)
-
- №3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 210c^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1} .
-
- №4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 267$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ дайте в м/с.
-
- №5. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

- №6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 45$ Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.
-
- №7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в кельвинах), T_2 – температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 50%, если температура холодильника $T_2 = 275$ К? Ответ дайте в кельвинах.
-
- №8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m_e (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы $m_{\text{др}}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{c_e m_e (t_2 - t_1)}{q_{\text{др}} m_{\text{др}}} \cdot 100\%$, где $c_e = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) – теплоемкость воды, $q_{\text{др}} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m = 83$ кг воды от 10°C до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 21%. Ответ дайте в килограммах/
-
- №9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1560$ тонн представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 20$ м и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 130 кПа. Ответ дайте в метрах.
-
- №10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 180$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задается формулой $U = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 170 В? Ответ дайте в Омах.
-
- №11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением:
- $$f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а } u = 7 \text{ м/с и } v = 5 \text{ м/с — скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости } c \text{ (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике } f \text{ будет не менее } 155 \text{ Гц?}$$

- №12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с - скорость звука в воде, f_0 - частота испускаемых импульсов, f - частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

- №13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1200$ кг - общая масса навеса и колонны, D - диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ дайте в метрах.

- №14. Автомобиль, масса которого равна $m = 2000$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 3000 Н. Ответ дайте в секундах.

- №15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность - вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 10.

- №16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 9.

- №17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

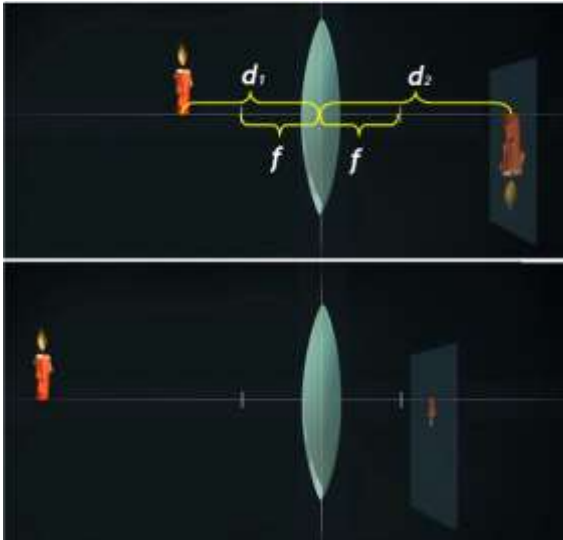
$$R = \frac{5In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

■ **Решение (примеры)** Дробно-рациональные уравнения или неравенства

№1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 45$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение:



Надо найти наименьшее значение d_1 — расстояние от линзы до лампочки.

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_2}$$

$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{45} - \frac{1}{d_2}$. При наименьшем значении d_1 дробь $\frac{1}{d_1}$ будет принимать наибольшее значение. Выражение $\frac{1}{45} - \frac{1}{d_2}$ будет принимать наибольшее значение, если дробь $\frac{1}{d_2}$ принимает наименьшее значение, а это достигается при наибольшем значении $d_2 = 180$.

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{45} - \frac{1}{180} = \frac{4-1}{180} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}, \quad d_1 = 60 \in (50; 70).$$

Ответ: 60.

№2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 3$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 5% от силы тока короткого замыкания $I_{K3} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

Решение:

$$I \leq 0,05 \cdot I_{K3}, \quad \frac{\varepsilon}{R+r} \leq 0,05 \cdot \frac{\varepsilon}{r}, \quad \frac{1}{R+3} \leq \frac{1}{60}, \quad (R+3 > 0) \quad R \geq 57, \quad R_{\text{наим}} = 57.$$

Ответ: 57.

№3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 210 c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1} .

Решение:

$$A \leq A_0 + 0,125A_0, \quad A \leq 1,125A_0 = 1\frac{1}{8}A_0 = \frac{9}{8}A_0. \text{ Т.к. } \omega \text{ меньше, чем } \omega_p, \text{ то } |\omega_p^2 - \omega^2| = \omega_p^2 - \omega^2 > 0.$$

$$\frac{A_0 \omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \leq \frac{9}{8}A_0, \quad 8\omega_p^2 \leq 9(\omega_p^2 - \omega^2), \quad \omega \leq \frac{\omega_p}{3} = \frac{210}{3} = 70, \quad \omega_{\text{наиб}} = 70.$$

Ответ: 70.

- №4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 267$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c – скорость

звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 3 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Решение:

$$f(v) - f_0 \geq 3, \quad \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 3, \quad \frac{267}{1 - \frac{v}{315}} - 267 \geq 3, \quad \frac{267 \cdot 315 - 270 \cdot 315 + 270v}{315 - v} \geq 0 \quad (315 - v > 0)$$

$$270v \geq 3 \cdot 315, \quad v \geq 3,5 \quad v_{\text{наим}} = 3,5.$$

Ответ: 3,5.

- №5. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

Решение:

$$I \leq 4, \quad \frac{220}{R} \leq 4, \quad (R > 0) \quad R \geq 55, \quad R_{\text{наим}} = 55.$$

Ответ: 55.

- №6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 45$ Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.

Решение:

$$R_{\text{общ}} \geq 20, \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 20, \quad \frac{45 R_2}{45 + R_2} \geq 20 \quad (45 + R_2 > 0)$$

$$45 R_2 \geq 900 + 20 R_2, \quad R_2 \geq 36, \quad R_{2 \text{ наим}} = 36.$$

Ответ: 36.

- №7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в кельвинах), T_2 – температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 50%, если температура холодильника $T_2 = 275$ К? Ответ дайте в кельвинах.

Решение:

$$50\% = \frac{T_1 - 275}{T_1} \cdot 100\%, \quad T_1 = (T_1 - 275) \cdot 2, \quad T_1 = 550.$$

Ответ: 550.

№8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m_g (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы m_{dp} кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{c_g m_g (t_2 - t_1)}{q_{dp} m_{dp}} \cdot 100\%$, где $c_g = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг ·

К) - теплоемкость воды, $q_{dp} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг - удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m = 83$ кг воды от 10°C до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 21%. Ответ дайте в килограммах.

Решение: $21\% = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 83 \cdot (100^\circ - 10^\circ)}{8,3 \cdot 10^6 \cdot m_{dp}} \cdot 100\%$, $21 = \frac{42 \cdot 10^2 \cdot 83 \cdot 90}{83 \cdot 10^5 \cdot m_{dp}} \cdot 10^2$, $m_{dp} = 18$.

Ответ: 18.

№9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1560$ тонн представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 20$ м и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 130 кПа. Ответ дайте в метрах.

Решение: $p \leq 130$, $\frac{mg}{2ls} \leq 130$, $\frac{1560 \cdot 10}{2 \cdot 20 \cdot s} \leq 130$, $\frac{3}{s} \leq 1$ и т. к. $s > 0$, то $s \geq 3$.
Наименьшее значение $s = 3$ м.

Ответ: 3.

№10. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 180$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задается формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 170 В? Ответ дайте в Омах.

Решение:

$U \geq 170$, $\frac{\varepsilon R}{R + r} \geq 170$, $\frac{180R}{R + 1} \geq 170$, $\frac{18R}{R + 1} \geq 17$ и т. к. $R + 1 > 0$, то $18R \geq 17(R + 1)$, $R \geq 17$.
Наименьшее значение $R = 17$.

Ответ: 17.

№11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим

выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 7$ м/с и $v = 5$ м/с - скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 155 Гц?

Решение: $f \geq 155$, $f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v} \geq 155$, $150 \cdot \frac{c + 7}{c - 5} \geq 155$, $30 \cdot \frac{c + 7}{c - 5} \geq 31$ ($c - 5 > 0$),
 $30(c + 7) \geq 31(c - 5)$, $c \leq 365$. Наибольшее значение $c = 365$.

Ответ: 365.

- №12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с - скорость звука в воде, f_0 - частота испускаемых импульсов, f - частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

Решение:

$$15 = 1500 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad 1 = 100 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad f + 198 = 100f - 19800, \quad 99f = 19998, \quad f = 202.$$

Ответ: 202.

- №13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1200$ кг - общая масса навеса и колонны, D - диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ дайте в метрах.

Решение: $P \leq 400000, \quad \frac{4mg}{\pi D^2} \leq 400000, \quad \frac{4 \cdot 1200 \cdot 10}{3 \cdot D^2} \leq 400000$ и т. к. $D^2 > 0$, то $D \geq 0,2$.

Наименьшее значение $D = 0,2$ м.

Ответ: 0,2.

- №14. Автомобиль, масса которого равна $m = 2000$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 300$ метров.

Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$.

Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 3000 Н. Ответ дайте в секундах.

Решение: $F \geq 3000, \quad \frac{2 \cdot 2000 \cdot 300}{t^2} \geq 3000$ и т.к. $t^2 > 0$, то $t^2 \leq 400, \quad t \leq 20$.

Наибольшее значение $t = 20$.

Ответ: 20.

- №15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность - вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 10.

Решение: При максимальных показателях $In = Op = Tr = 3$. $10 = \frac{2 \cdot 3 + 3 + 4 \cdot 3}{A}, \quad 10A = 21, \quad A = 2,1$.

Ответ: 2,1.

- №16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 9.

Решение: $9 = \frac{4 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 + 2}{A}, \quad A = 2.$

Ответ: 2.

- №17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{5In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Решение:

По условию $R = In = Op = Q = Tr$, тогда получим уравнение $R = \frac{5R + R + 4R + R}{A}, \quad A = 11.$

Ответ: 11.

■ Тест

Дробно-рациональные уравнения или неравенства

№1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

№2. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 40% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\mathcal{E}}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

№3. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 360 \text{с}^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на одну пятнадцатую. Ответ выразите в с^{-1} .

№4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 250$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее, чем на 2 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ дайте в м/с.

№5. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 25 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

№6. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 72$ Ом. Параллельно с ним в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 8 Ом. Ответ дайте в омах.

- №7. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% , \text{ где } T_1 - \text{температура нагревателя (в кельвинах)}, T_2 - \text{температура}$$

холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 75%, если температура холодильника $T_2 = 280$ К? Ответ дайте в кельвинах.

- №8. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m_e (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров

$$\text{массы } m_{op} \text{ кг. Он определяется формулой } \eta = \frac{c_e m_e (t_2 - t_1)}{q_{op} m_{op}} \cdot 100\% , \text{ где } c_e = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot$$

К) - теплоемкость воды, $q_{op} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг - удельная теплота сгорания дров. Определите массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m = 249$ кг воды от 10°C до кипения, если известно, что КПД кормозапарника равен 24%. Ответ дайте в килограммах.

- №9. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 2550$ тонн представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 17$ м и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса

экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 300 кПа. Ответ дайте в метрах.

- №10. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задается формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ дайте в Омах.

- №11. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 160$ Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c - \text{ скорость распространения сигнала в среде (в м/с)}, \text{ а } u = 8 \text{ м/с и}$$

$v = 16$ м/с - скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 170 Гц?

- №12. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 187 МГц. Скорость погружения батискафа V вычисляется по формуле

$$V = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0} , \text{ где } c = 1500 \text{ м/с - скорость звука в воде, } f_0 - \text{ частота испускаемых импульсов,}$$

f – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 4 м/с. Ответ выразите в МГц.

- №13. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 600$ кг - общая масса навеса и колонны, D – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 800000 Па. Ответ дайте в метрах.
-

- №14. Автомобиль, масса которого равна $m = 1300$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 400$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 2600 Н. Ответ дайте в секундах.
-

- №15. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель - целое число от -3 до 3. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность - вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 60.

- №16. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций - вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 4Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 2.

- №17. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель - целое число от -2 до 2. Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций - вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

▪ **Ответы (тест)** Дробно-рациональные уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4	№5	№6
35	3	90	2,5	8,8	9

№7	№8	№9	№10	№11	№12
1120	47,25	2,5	5	400	188

№13	№14	№15	№16	№17
0,1	20	0,4	8	9