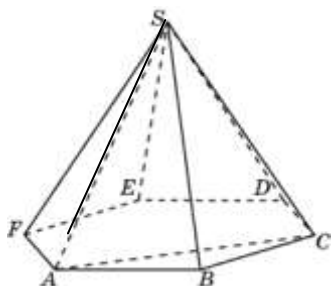


Нахождение объёма пирамиды из многогранников

Решение (примеры)

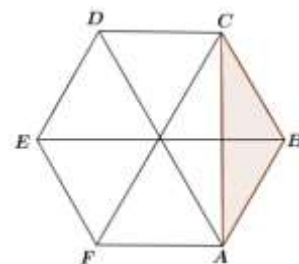
- №1. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = 1, \quad S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{SABCDEF}.$$

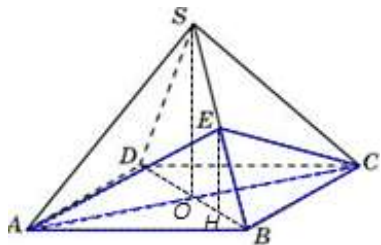
Пирамиды $SABC$ и $SABCDEF$ имеют одинаковую высоту.

$$V_{SABCDEF} = 6 \cdot V_{SABC} = 6 \cdot 1 = 6.$$



Ответ: 6.

- №2. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E – середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

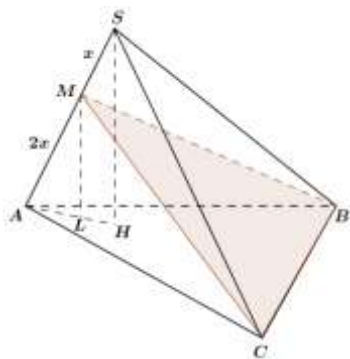


$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = 12$$

$$V_{EABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot EH = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} \cdot \frac{SO}{2} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \cdot \frac{1}{4} = \frac{V_{SABCD}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Ответ: 3.

- №3. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 15$$

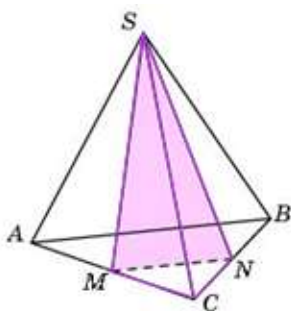
$$V_{MAC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot ML, \text{ где } ML = \frac{2}{3} SH, \text{ тогда}$$

$$V_{MAC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \frac{2}{3} SH = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10.$$

$$V_{SMCB} = 15 - 10 = 5 < V_{MAC}.$$

Ответ: 10.

- №4. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



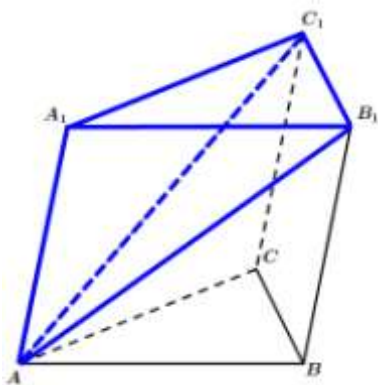
MN – средняя линия, поэтому $\frac{AB}{MN} = 2$.

$\triangle ABC \sim \triangle MNC$ с коэффициентом подобия $k = 2$, тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = k^2 = 4. \quad V_{SMNC} = \frac{1}{3} S_{MNC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABC}}{4} \cdot h = \frac{12}{4} = 3.$$

Ответ: 3.

- №5. От треугольной призмы, объем которой равен 15, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.



От треугольной призмы отсеки треугольную пирамиду $AA_1B_1C_1$.

Высота призмы является высотой и для отсеченной треугольной пирамиды.

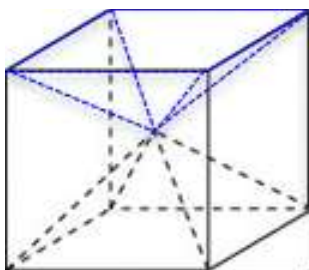
$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h = 15.$$

$$V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5.$$

$$V_{ABB_1C_1C} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{AA_1B_1C_1} = 15 - 5 = 10.$$

Ответ: 10.

- №6. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной – центр куба.



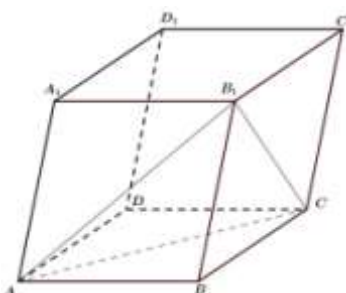
Центр куба – это точка пересечения его диагоналей.

Всего граней у куба – 6 и равных пирамид, с вершиной в центре куба с основанием гранью куба, тоже – 6. Тогда объем четырехугольной

пирамиды составляет $\frac{1}{6}$ объема куба, т.е. $\frac{12}{6} = 2$.

Ответ: 2.

- №7. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCB_1$.



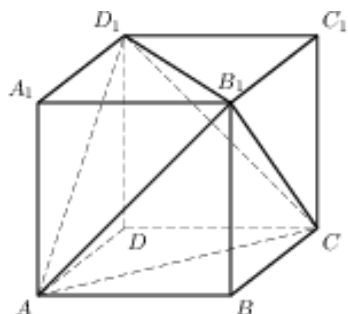
$$V_{\text{парал}} = S_{ABCD} \cdot h = 12.$$

У пирамиды и параллелепипеда одинаковая высота, значит,

$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} \cdot h = \frac{V_{\text{парал}}}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Ответ: 2.

- №8. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



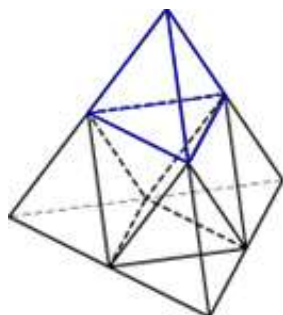
$V_{\text{парал}} = S_{ABCD} \cdot h = 4,5$. От параллелепипеда отсечем четыре равных тетраэдра. Найдём объем одного из них, например,

$$V_{B_1 ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$V_{AD_1 CB_1} = V_{\text{парал}} - 4 \cdot V_{B_1 ABC} = 4,5 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

- №9. Объём тетраэдра равен 19. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

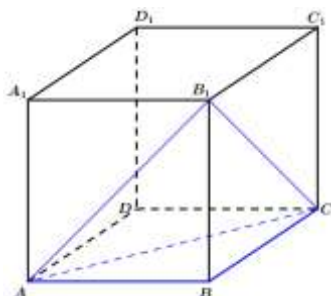


От данного тетраэдра отсечем четыре подобных ему тетраэдра с коэффициентом подобия $k^3 = 2^3 = 8$.

$$V_{\text{октаэдра}} = V_{\text{б.тетр}} - 4 \cdot V_{\text{м.тетр}} = 19 - 4 \cdot \frac{19}{8} = 9,5.$$

Ответ: 9,5.

- №10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 3, AA_1 = 4$.

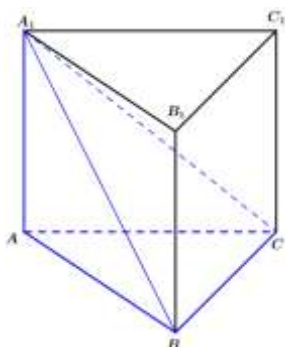


Многогранник с вершинами A, B, C, B_1 является тетраэдром, поэтому

$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Ответ: 6.

- №11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

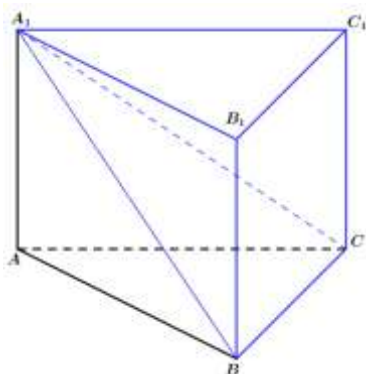


Многогранник с вершинами A, B, C, A_1 является тетраэдром, поэтому

$$V_{ABCA_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2.$$

Ответ: 2.

- №12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, B, C, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 8, а боковое ребро равно 3.

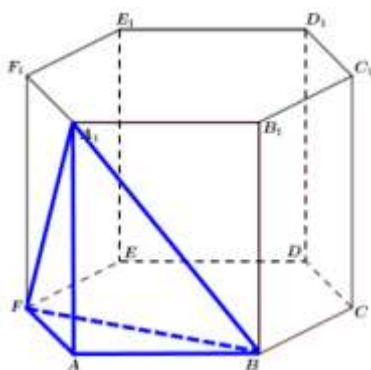


Многогранник с вершинами A_1, B_1, B, C, C_1 является четырехугольной пирамидой с вершиной A_1 .

$$\begin{aligned} V_{A_1B_1BCC_1} &= V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{A_1ABC} = S_{ABC} \cdot AA_1 - \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AA_1 = \\ &= \frac{2}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 3 = 16 \end{aligned}$$

Ответ: 16.

- №13. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 12.

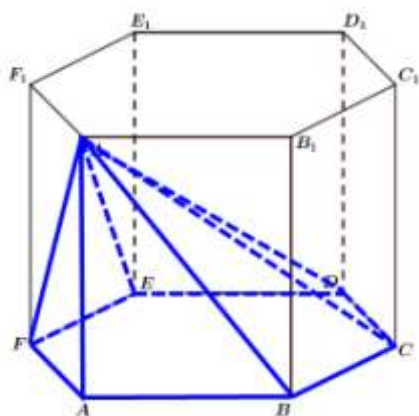


Получившийся многогранник является треугольной пирамидой с высотой AA_1 и основанием ABF .

$$\begin{aligned} S_{ABF} &= \frac{1}{6} S_{ABCDEF} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2}. \\ V_{ABFA_1} &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABF} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 12 = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

- №14. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



Получившийся многогранник является шестиугольной пирамидой с высотой AA_1 и основанием $ABCDEF$.

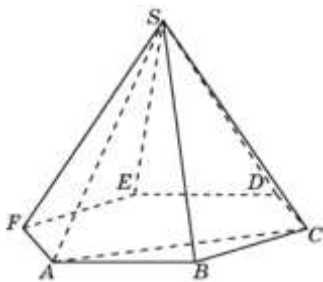
$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Ответ: 4.

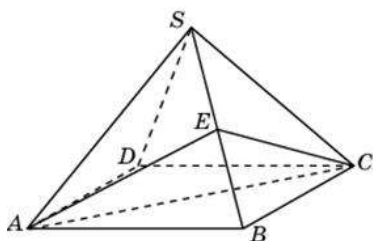
■ Тест

Нахождение объема пирамиды из многогранников

- №1. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 48. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

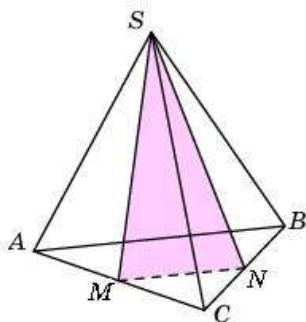


- №2. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 132. Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

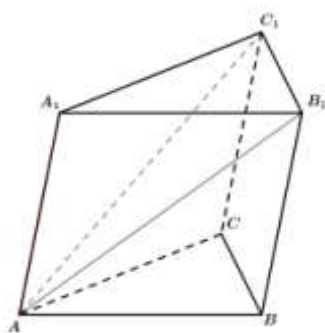


- №3. Объем треугольной пирамиды равен 39. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 7 : 6, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

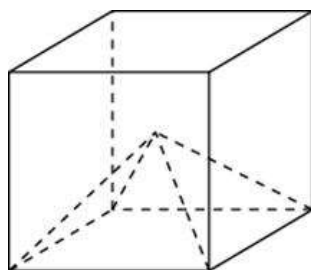
- №4. От треугольной призмы, объем которой равен 6, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.



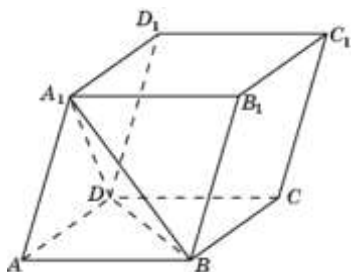
- №5. От треугольной призмы, объем которой равен 102, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.



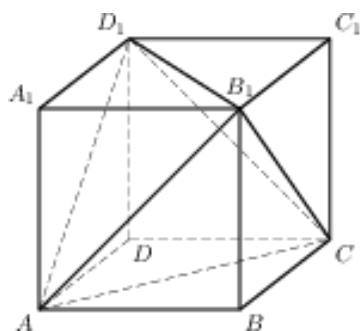
- №6. Объем куба равен 114. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



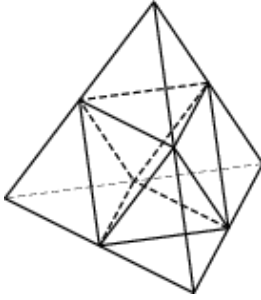
- №7. Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



- №8. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 3,6. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1 .



- №9. Объем тетраэдра равен 14. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер данного тетраэдра.



- №10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.

- №11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$.

- №12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

- №13. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

▪ **Ответы (тест)** Нахождение объема пирамиды из многогранников

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12	№13
288	33	21	1,5	68	19	18	1,2	7	8	16	1	4