

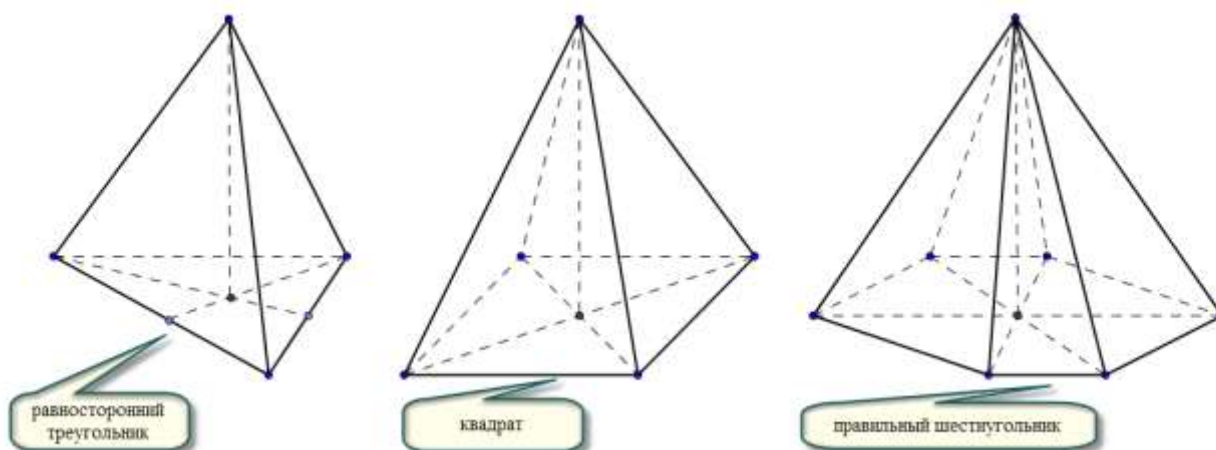
## ✓ ПИРАМИДА И ЕЕ ЭЛЕМЕНТЫ

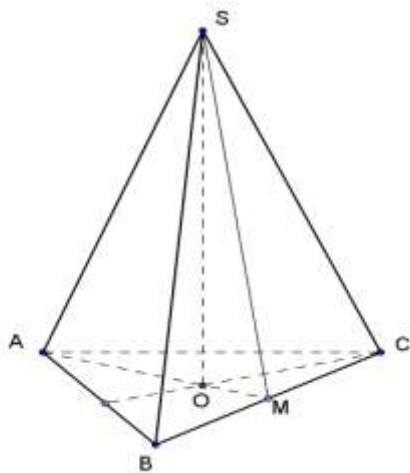
**Пирамида** - многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемым **основанием** пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых **боковыми гранями** пирамиды. Общая вершина боковых граней называется **вершиной** пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются **боковыми ребрами**.



Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые ребра равны, называется **правильной**.

### Правильные пирамиды





### Правильная треугольная пирамида

$\triangle ABC$  – равносторонний

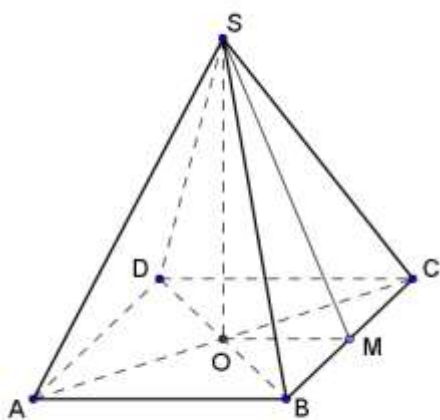
$O$  – точка пересечения медиан, высот, биссектрис;  
центр вписанной и описанной окружностей

$$AB = a_3 = R_{ABC} \sqrt{3} = AO \sqrt{3}$$

$$R = 2r = 2OM$$

$$AM = h_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



### Правильная четырехугольная пирамида

$\square ABCD$  – квадрат

$O$  – точка пересечения диагоналей;

центр вписанной и описанной окружности

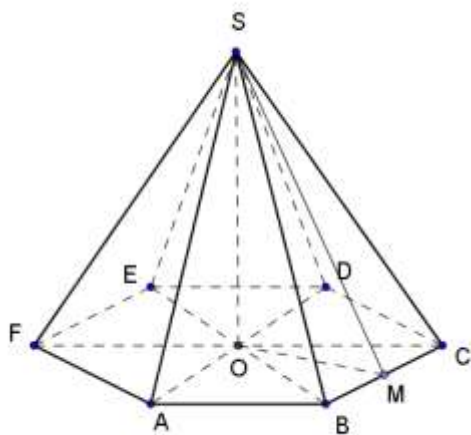
$$AC = d = a\sqrt{2}$$

$$OC = R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = a_4 = R\sqrt{2}$$

$$OM = r = \frac{a}{2}$$

$$S_{\square} = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$



### Правильная шестиугольная пирамида

$ABCDEF$  – правильный шестиугольник

$O$  – точка пересечения диагоналей  $AD$ ,  $BE$ ,  $FC$ ;

центр вписанной и описанной окружностей

$$AB = a_6 = R = OA$$

$\triangle BOC$  – равносторонний

$$r = OM = h_{BOC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_6 = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

$SO$  – высота пирамиды,  $SO \perp (ABC)$  и  $O$  – центр основания

$SM$  – апофема, высота боковой грани,  $SM \perp BC$

## ✓ Свойства

1. У правильной пирамиды боковые ребра равны и одинаково наклонены к плоскости основания.  
 $SA = SB = SC = \dots$        $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots$

2. Боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники, одинаково наклоненные к основанию.  
 $\triangle ASB = \triangle BSC = \dots$        $\angle SMO$  – угол между боковой гранью и плоскостью основания.

3. Боковая поверхность правильной пирамиды

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SM, \quad \text{где } SM \text{ – апофема}$$

$$S_{бок} = S_{бок.грani} \cdot n, \quad \text{где } n \text{ – число граней}$$

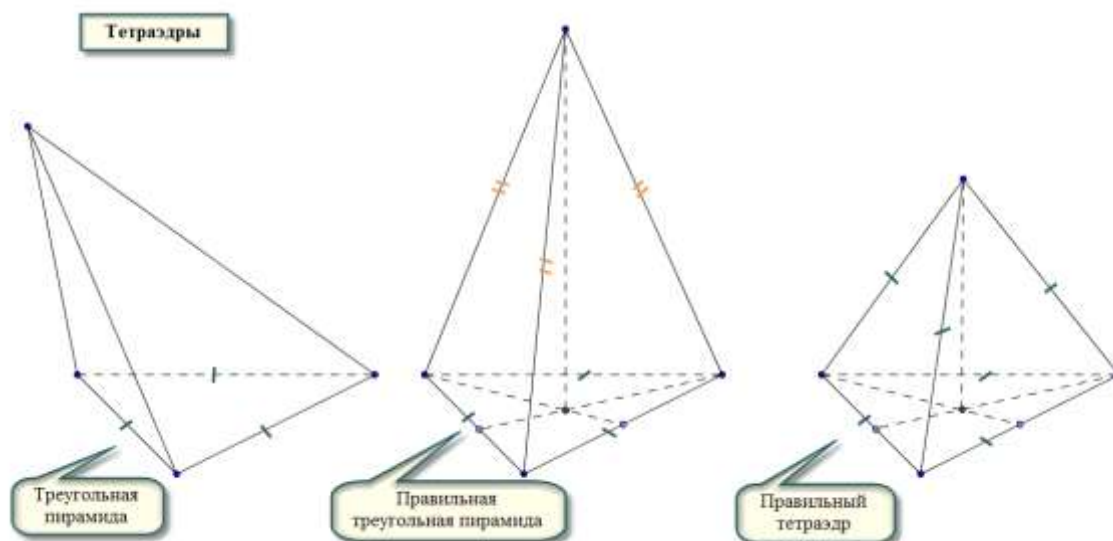
$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \varphi}, \quad \text{где } \varphi = \angle SMO \text{ – угол наклона всех граней к основанию}$$

4.  $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

5.  $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SO$

Многогранник, составленный из четырех граней, называется **тетраэдром**.

Иногда тетраэдром называют произвольную треугольную пирамиду. Поэтому когда речь идет о правильном многограннике, будем говорить - правильный тетраэдр.



В общем случае у тетраэдра все грани - произвольные треугольники.

Замечательное свойство тетраэдра, которое будем использовать при решении задач: положите тетраэдр на любую из граней - многогранник останется тетраэдром.