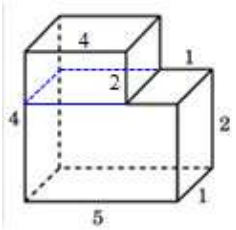
Объем призмы

- ***Решение (примеры)***

№1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

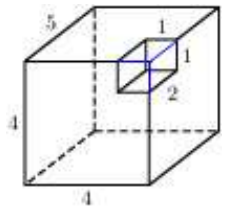


Объем многогранника найдем как сумму объемов прямоугольных параллелепипедов с измерениями: нижний - 5, 1 и 2; верхний - 4, 2 и 1.

$V = V_{нижний} + V_{верхний} = 5 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

Ответ: 18.

№2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

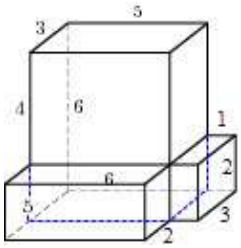


Объем многогранника найдем как разность объемов прямоугольных параллелепипедов с измерениями: больший - 4, 4 и 5; меньший - 2, 1 и 1.

$V = V_{больший} - V_{меньший} = 5 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$.

Ответ: 72.

№3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

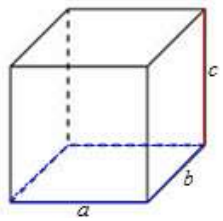


Объем многогранника найдем как сумму объемов трех прямоугольных параллелепипедов с измерениями: передний - 5, 2 и 2; боковой - 3, 2 и 1; задний - 5, 3 и 6.

$V = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 6 = 116$.

Ответ: 116.

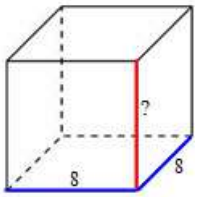
№4. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 20. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



$V = abc = S \cdot c = 20 \cdot 4 = 80$.

Ответ: 80.

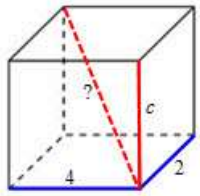
№5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 8 и 6. Объем параллелепипеда равен 240. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



$V = abc, \quad 240 = 8 \cdot 6 \cdot c, \quad c = 5$.

Ответ: 5.

№6. **Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 2. Объем параллелепипеда равен 32. Найдите его диагональ.**

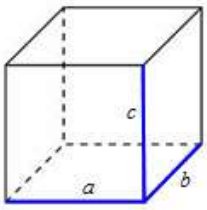


$V=abc,\ \ 32=4\cdot 2\cdot c,\ \ c=4.$

$d^2=a^2+b^2+c^2,\ \ d^2=4^2+2^2+4^2,\ \ d=6.$

Ответ: 6.

№7. **Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 5. Объем параллелепипеда равен 30. Найдите площадь его поверхности.**



$V=abc,\ \ 30=1\cdot 5\cdot c,\ \ c=6.$

$S=2(ab+ac+bc),\ \ S=2(1\cdot 5+1\cdot 6+5\cdot 6)=82.$

Ответ: 82.

№8. **Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 0,5, 0,5 и 32. Найдите ребро равновеликого ему куба.**

$V_{прямоуг.парал-да}=abc=0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 32=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 32=8.$

$V_{прямоуг.парал-да}=V_{куба}\ ,\ \ V_{куба}=a^3,\ \ 8=a^3,\ \ a=2.$

Ответ: 2.

№9. **Объем куба равен 512. Найдите площадь его поверхности.**

$V_{куба}=a^3,\ \ 512=a^3,\ \ a=8.\qquad S_{пов.куба}=6a^2=6\cdot 8^2=384.$

Ответ: 384.

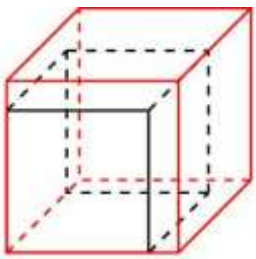
№10. **Объем куба равен $2187\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.**

$d=a\sqrt{3},\ \ d^3=3\sqrt{3}a^3,\ \ a^3=\frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$

$V=a^3,\ \ 2187\sqrt{3}=\frac{d^3}{3\sqrt{3}},\ \ d^3=3^3\cdot 9^3,\ \ d=27.$

Ответ: 27.

№11. **Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 91. Найдите ребро куба.**



	Ребро куба	Объем
Было	a	a^3
Стало	$a+1$	$a^3+91=(a+1)^3$

$a^3+91=a^3+3a^2+3a+1$

$3a^2+3a-90=0$

$a^2+a-30=0,\ \ a=5\ \ (a>0$

Ответ: 5.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№12. **Площадь поверхности куба равна 294. Найдите его объем.**

$S_{пов.куба} = 6a^2,\ \ 294 = 6 \cdot a^2,\ \ a^2 = 49,\ \ a = 7.\quad V = a^3 = 7^3 = 343.$

Ответ: 343.

№13. **Объем одного куба в 216 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?**

Все кубы подобны друг другу. Если линейный коэффициент подобия линейных элементов равен k, то площади подобных фигур относятся с коэффициентом k^2, а объемы с коэффициентом - k^3.

$\frac{V_1}{V_2} = k^3,\ \ \frac{V_1}{V_2} = 216,\ \ \frac{V_1}{V_2} = 6^3,\ \ k = 6.$

$\frac{S_1}{S_2} = k^2,\ \ \frac{S_1}{S_2} = 6^2,\ \ \frac{S_1}{S_2} = 36.$

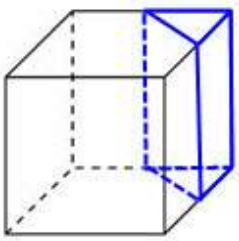
Ответ: 36.

№14. **Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в пятнадцать раз?**

$\frac{a_1}{a_2} = k,\ \ \frac{a_1}{a_2} = 15,\ \ k = 15.\qquad \frac{V_1}{V_2} = k^3,\ \ \frac{V_1}{V_2} = 15^3,\ \ \frac{V_1}{V_2} = 3375.$

Ответ: 3375.

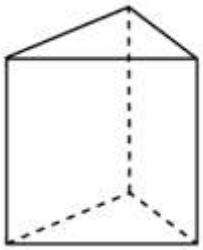
№15. **Объем куба равен 34. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.**



Все грани куба - квадраты. Сечение отсекает призму, в основании которой прямоугольный треугольник. который составляет $\frac{1}{8}$ площади квадрата. Высота призмы равна длине ребра куба, поэтому объем треугольной призмы равен $\frac{1}{8}$ объема куба. $V_{призмы} = S_{осн} \cdot h = \frac{1}{8}a^2 \cdot a = \frac{a^3}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$

Ответ: 4,25.

№16. **Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7. Объем призмы равен 84. Найдите ее боковое ребро.**



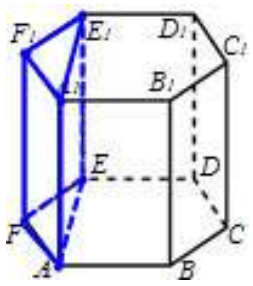
В прямой призме боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, поэтому оно же является высотой призмы.

$V_{призмы} = S_{осн} \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot h$

$84 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot h,\ \ h = 4$

Ответ: 4.

№17. **Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, E, F, A_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 14.**



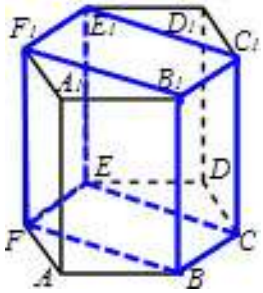
Пусть ребро основания правильной шестиугольной призмы равно a. Площадь треугольника AFE составляет $\frac{1}{6}$ площади основания.

$$S_{AFE}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 120^\circ=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=S_{прав.\triangle}=\frac{1}{6}S_6.$$

$$V_{AFEA_1F_1E_1}=S_{AFE}\cdot h=\frac{1}{6}S_{ABCDEF}\cdot AA_1=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 14=7.$$

Ответ: 7.

№18. **Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $B, C, E, F, B_1, C_1, E_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 12.**



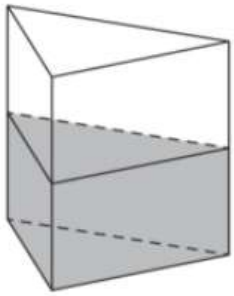
Пусть ребро основания правильной шестиугольной призмы равно a. Площадь четырехугольника $BCEF$ составляет $1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$ площади основания.

$$S_{BCEF}=\frac{2}{3}S_6=\frac{2}{3}\cdot 9=6.$$

$$V_{BCEFB_1C_1E_1F_1}=S_{BCEF}\cdot AA_1=6\cdot 12=72.$$

Ответ: 72.

№19. **В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 $см^3$ воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.**



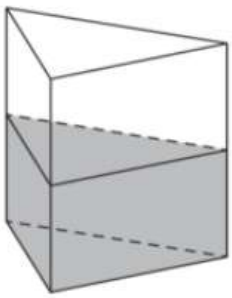
$$V_{жидкости}=h_1\cdot S_{осн}=2300,\ S_{осн}=\frac{2300}{25}$$

$$\triangle h=h_2-h_1=27-25=2$$

$$V_{детали}=\triangle h\cdot S_{осн}=2\cdot\frac{2300}{25}=184$$

Ответ: 184.

№20. **В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.**



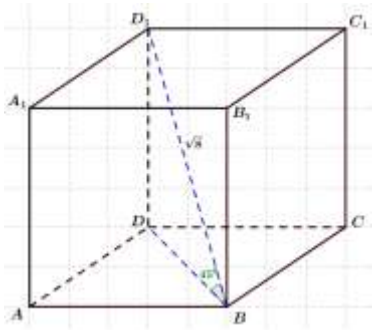
	Высота	Сторона основания	Площадь основания	Объем
I сосуд	80	a	S	$V=S\cdot 80$
II сосуд	h	$4a$	$16S$	$V=16S\cdot h$

Так как объем переливаемой жидкости сохраняется, то $S\cdot 80=16S\cdot h$, $h=5$.

Ответ: 5.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№21. **Одна из граней прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.**



Решение:

Пусть грань $ABCD$ – квадрат. $DD_1 \perp ABC$, $\angle DBD_1 = 45^\circ$.

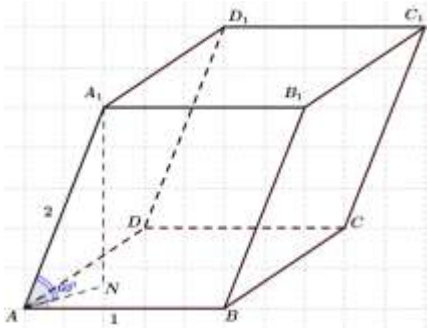
$\triangle DBD_1$ – прямоугольный, равнобедренный,

$$DB = DD_1 = \frac{BD_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot DD_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4.

№22. **Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.**



Решение:

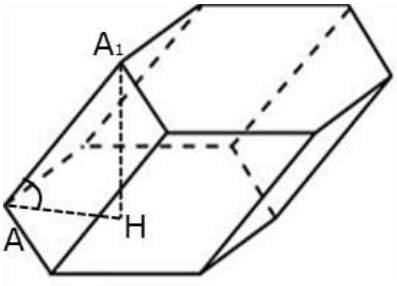
Пусть грань $ABCD$ – ромб. Ребро AA_1 составляет с плоскостью ABC угол 60°. $A_1N \perp ABC$, $\angle A_1AN = 60^\circ$.

$$A_1N = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1N = AD \cdot AB \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

№23. **Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.**



Решение:

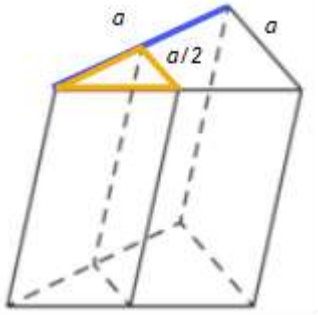
Проведем A_1H перпендикулярно плоскости основания призмы.

$\angle A_1AH = 30^\circ$, $A_1H = AA_1 \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

$$V = S_{осн} \cdot A_1H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

№24. **Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы.**



Высота отсеченной призмы осталась неизменной, а в основании получился треугольник, подобный треугольнику, лежащему в основании исходной призмы с коэффициентом подобия 2. Поэтому

$$\frac{S_{осн.исх.призмы}}{S_{осн.отс.призмы}} = k^2 = 2^2 = 4.$$

$$\frac{V_{исх}}{V_{отс}} = \frac{S_{исх.осн.} \cdot h}{S_{осн.отс.} \cdot h}; \quad \frac{32}{V_{отс}} = 4; \; V_{отс} = 8$$

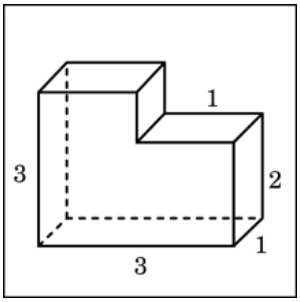
Ответ: 8.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

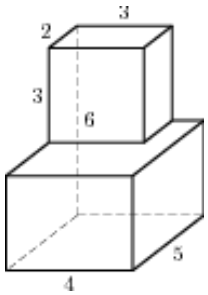
▪ ***Тест*** Объем призмы

Вариант 1

№1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



№2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№3. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 20. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 7. Найдите объем параллелепипеда.

№4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3, 3 и 24. Найдите ребро равновеликого ему куба.

№5. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в пять раз?

№6. Объем куба равен $0,003\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

№7. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

№8. Объем одного куба в 729 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

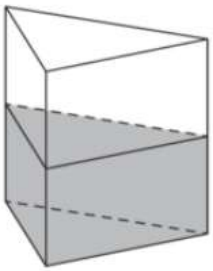
№9. Объем куба равен 52. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

№10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 5.

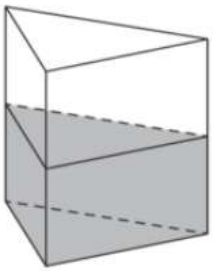
№11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A, C, D, F, A_1, C_1, D_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 6.

№12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 7, AD = 5, AA_1 = 10$.

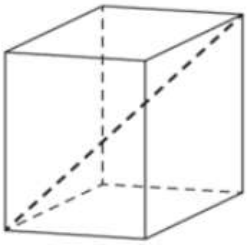
№13. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 $см^3$ воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 25 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.



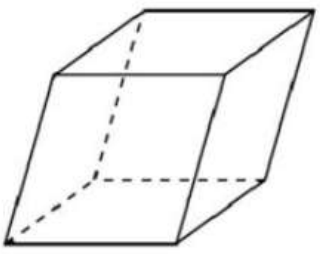
№14. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 3 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



№15. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{2}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

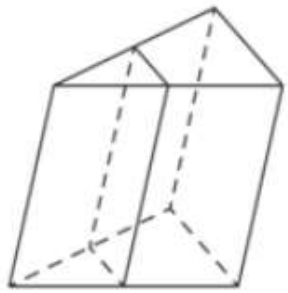


№16. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 3 и острым углом 30°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 30° и равно 6. Найдите объем параллелепипеда.

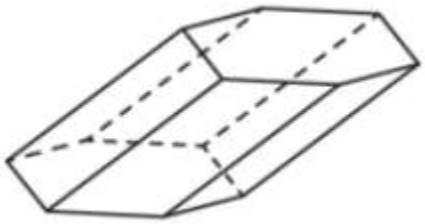


МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№17. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.

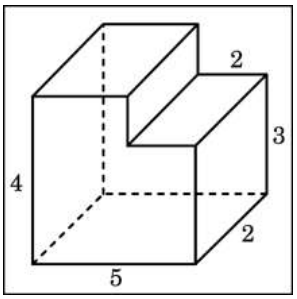


№18. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 7, а боковые ребра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.

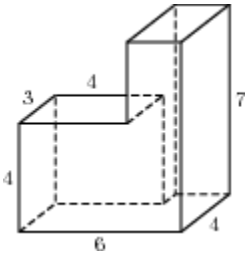


Вариант 2

№1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



№2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№3. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 21. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.

№4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 0,5 и 16. Найдите ребро равновеликого ему куба.

№5. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в шесть раз?

№6. Объем куба равен $3000\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

№7. Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его объем увеличится на 63. Найдите ребро куба.

№8. Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

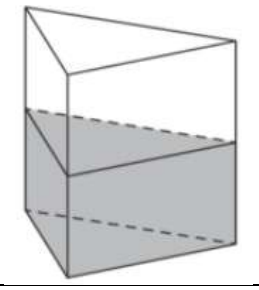
№9. Объем куба равен 94. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

№10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $C,\ D,\ E,\ C_1,\ D_1,\ E_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 3.

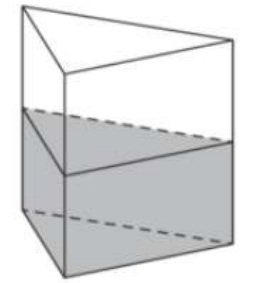
№11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $B,\ C,\ E,\ F,\ B_1,\ C_1,\ E_1,\ F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 2.

№12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, C_1, D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9, AD = 4, AA_1 = 10$.

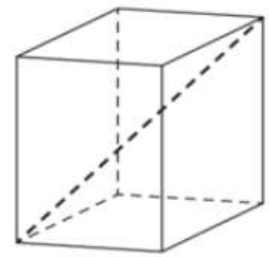
№13. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 $см^3$ воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 22 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.



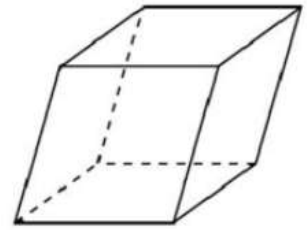
№14. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 4 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 2 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



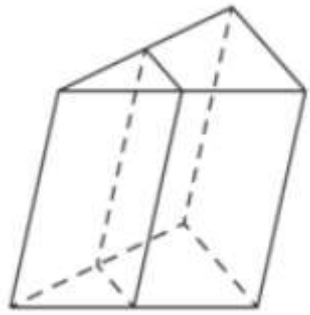
№15. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.



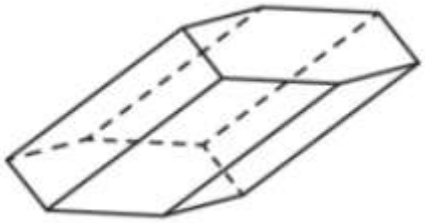
№16. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 4 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 7. Найдите объем параллелепипеда.



№17. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 40, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы.



№18. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые ребра равны $4\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.



- ***Ответы (тест)*** Объем призмы

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Вар.1	*8*	*78*	*140*	*6*	*125*	*0,3*	*17*	*81*	*6,5*	*2,5*	*28*	*175*
Вар.2	*36*	*104*	*63*	*2*	*216*	*30*	*1*	*25*	*11,75*	*2,5*	*12*	*180*
	№13	№14	№15	№16	№17	№18						
Вар.1	*375*	*5*	*0,5*	*13,5*	*20*	*882*						
Вар.2	*190*	*1*	*1,5*	*84*	*10*	*144*						