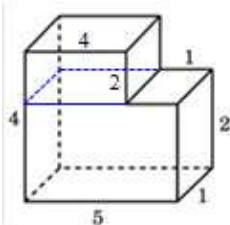


Объем призмы

Решение (примеры)

- №1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

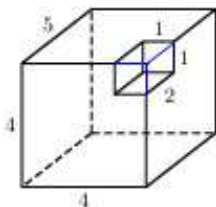


Объем многогранника найдем как сумму объемов прямоугольных параллелепипедов с измерениями: нижний - 5, 1 и 2; верхний - 4, 2 и 1.

$$V = V_{\text{нижний}} + V_{\text{верхний}} = 5 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 18.$$

Ответ: 18.

- №2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

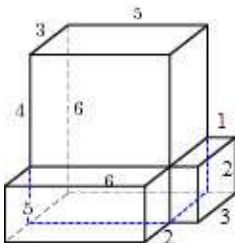


Объем многогранника найдем как разность объемов прямоугольных параллелепипедов с измерениями: больший - 5, 4 и 4; меньший - 2, 1 и 1.

$$V = V_{\text{большой}} - V_{\text{меньший}} = 5 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72.$$

Ответ: 72.

- №3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

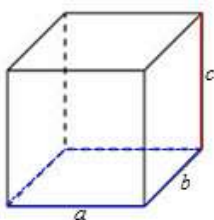


Объем многогранника найдем как сумму объемов трех прямоугольных параллелепипедов с измерениями: передний - 5, 2 и 2; боковой - 3, 2 и 1; задний - 5, 3 и 6.

$$V = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 6 = 116.$$

Ответ: 116.

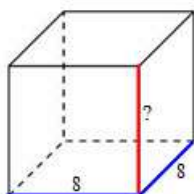
- №4. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 20. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



$$V = abc = S \cdot c = 20 \cdot 4 = 80.$$

Ответ: 80.

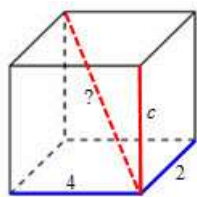
- №5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 8 и 6. Объем параллелепипеда равен 240. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



$$V = abc, \quad 240 = 8 \cdot 6 \cdot c, \quad c = 5.$$

Ответ: 5.

- №6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 2. Объем параллелепипеда равен 32. Найдите его диагональ.

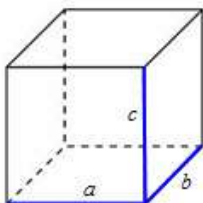


$$V = abc, \quad 32 = 4 \cdot 2 \cdot c, \quad c = 4.$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad d^2 = 4^2 + 2^2 + 4^2, \quad d = 6.$$

Ответ: 6.

- №7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 5. Объем параллелепипеда равен 30. Найдите площадь его поверхности.



$$V = abc, \quad 30 = 1 \cdot 5 \cdot c, \quad c = 6.$$

$$S = 2(ab + ac + bc), \quad S = 2(1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = 82.$$

Ответ: 82.

- №8. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 0,5, 0,5 и 32. Найдите ребро равновеликого ему куба.

$$V_{\text{прямоуг. парал-да}} = abc = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 32 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 = 8.$$

$$V_{\text{прямоуг. парал-да}} = V_{\text{куба}}, \quad V_{\text{куба}} = a^3, \quad 8 = a^3, \quad a = 2.$$

Ответ: 2.

- №9. Объем куба равен 512. Найдите площадь его поверхности.

$$V_{\text{куба}} = a^3, \quad 512 = a^3, \quad a = 8. \quad S_{\text{пов. куба}} = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 384.$$

Ответ: 384.

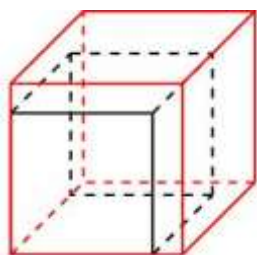
- №10. Объем куба равен $2187\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

$$d = a\sqrt{3}, \quad d^3 = 3\sqrt{3}a^3, \quad a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$$

$$V = a^3, \quad 2187\sqrt{3} = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}, \quad d^3 = 3^3 \cdot 9^3, \quad d = 27.$$

Ответ: 27.

- №11. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 91. Найдите ребро куба.



	Ребро куба	Объем
Было	a	a^3
Стало	$a + 1$	$a^3 + 91 = (a + 1)^3$ $a^3 + 91 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ $3a^2 + 3a - 90 = 0$ $a^2 + a - 30 = 0, \quad a = 5 \quad (a > 0)$

Ответ: 5.

№12. Площадь поверхности куба равна 294. Найдите его объем.

$$S_{\text{пов.куба}} = 6a^2, \quad 294 = 6 \cdot a^2, \quad a^2 = 49, \quad a = 7. \quad V = a^3 = 7^3 = 343.$$

Ответ: 343.

№13. Объем одного куба в 216 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Все кубы подобны друг другу. Если линейный коэффициент подобия линейных элементов равен k , то площади подобных фигур относятся с коэффициентом k^2 , а объемы с коэффициентом k^3 .

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3, \quad \frac{V_1}{V_2} = 216, \quad \frac{V_1}{V_2} = 6^3, \quad k = 6.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \quad \frac{S_1}{S_2} = 6^2, \quad \frac{S_1}{S_2} = 36.$$

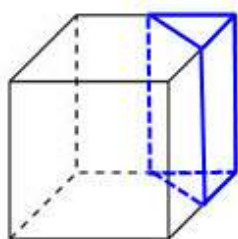
Ответ: 36.

№14. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в пятнадцать раз?

$$\frac{a_1}{a_2} = k, \quad \frac{a_1}{a_2} = 15, \quad k = 15. \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3, \quad \frac{V_1}{V_2} = 15^3, \quad \frac{V_1}{V_2} = 3375.$$

Ответ: 3375.

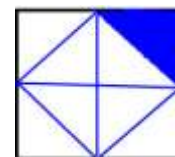
№15. Объем куба равен 34. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



Все грани куба - квадраты. Сечение отсекает призму, в основании которой прямоугольный треугольник, который составляет $\frac{1}{8}$ площади квадрата. Высота призмы равна длине

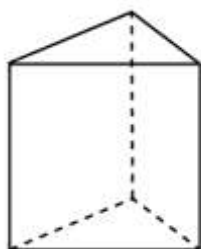
ребра куба, поэтому объем треугольной призмы равен $\frac{1}{8}$ объема

$$\text{куба. } V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{8} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$$



Ответ: 4,25.

№16. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7. Объем призмы равен 84. Найдите ее боковое ребро.



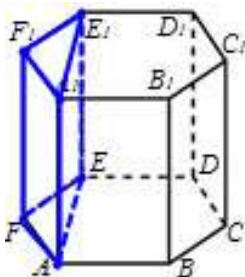
В прямой призме боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, поэтому оно же является высотой призмы.

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h$$

$$84 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot h, \quad h = 4$$

Ответ: 4.

- №17. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, E, F, A_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 14.



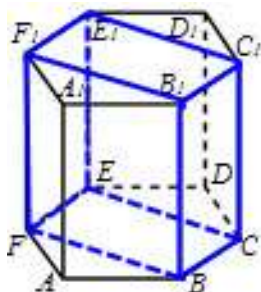
Пусть ребро основания правильной шестиугольной призмы равно a . Площадь треугольника AFE составляет $\frac{1}{6}$ площади основания.

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_{\text{прав.}\Delta} = \frac{1}{6} S_6.$$

$$V_{AFE A_1 F_1 E_1} = S_{AFE} \cdot h = \frac{1}{6} S_{ABCDEF} \cdot AA_1 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 14 = 7.$$

Ответ: 7.

- №18. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $B, C, E, F, B_1, C_1, E_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 12.



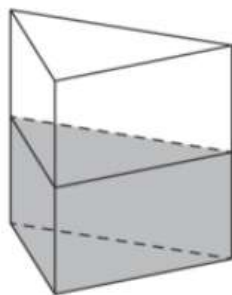
Пусть ребро основания правильной шестиугольной призмы равно a . Площадь четырехугольника $BCEF$ составляет $1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$ площади основания.

$$S_{BCEF} = \frac{2}{3} S_6 = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6.$$

$$V_{BCEF B_1 C_1 E_1 F_1} = S_{BCEF} \cdot AA_1 = 6 \cdot 12 = 72.$$

Ответ: 72.

- №19. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.



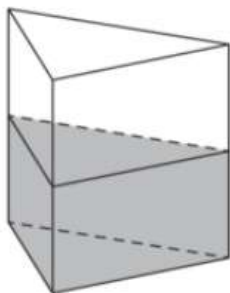
$$V_{\text{жидкости}} = h_1 \cdot S_{\text{осн}} = 2300, S_{\text{осн}} = \frac{2300}{25}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 27 - 25 = 2$$

$$V_{\text{детали}} = \Delta h \cdot S_{\text{осн}} = 2 \cdot \frac{2300}{25} = 184$$

Ответ: 184.

- №20. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

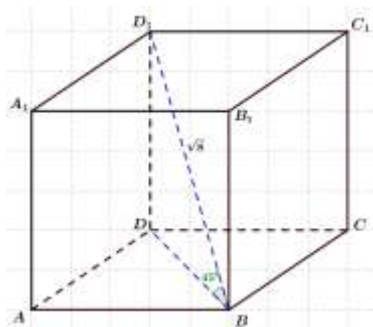


	Высота	Сторона основания	Площадь основания	Объем
I сосуд	80	a	S	$V = S \cdot 80$
II сосуд	h	$4a$	$16S$	$V = 16S \cdot h$

Так как объем переливаемой жидкости сохраняется, то $S \cdot 80 = 16S \cdot h$, $h = 5$.

Ответ: 5.

- №21. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.



Решение:

Пусть грань $ABCD$ — квадрат. $DD_1 \perp ABC$, $\angle DBD_1 = 45^\circ$.

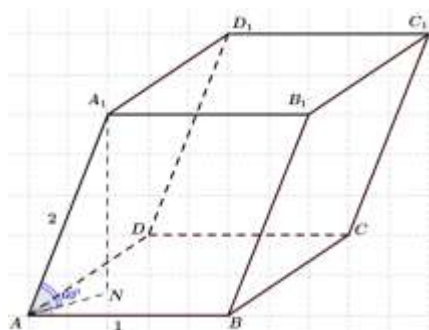
$\triangle DBD_1$ — прямоугольный, равнобедренный,

$$DB = DD_1 = \frac{BD_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot DD_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4.

- №22. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



Решение:

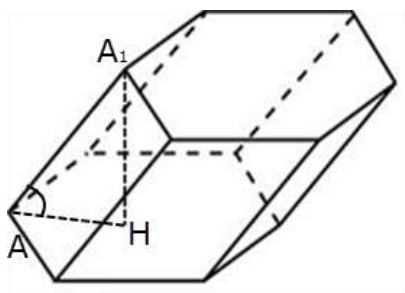
Пусть грань $ABCD$ — ромб. Ребро AA_1 составляет с плоскостью ABC угол 60° . $A_1N \perp ABC$, $\angle A_1AN = 60^\circ$.

$$A_1N = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1N = AD \cdot AB \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

- №23. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .



Решение:

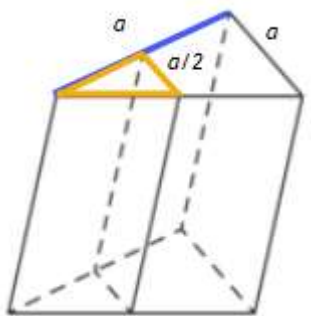
Проведем A_1H перпендикулярно плоскости основания призмы.

$$\angle A_1AH = 30^\circ, A_1H = AA_1 \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot A_1H = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

- №24. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы.



Высота отсеченной призмы осталась неизменной, а в основании получился треугольник, подобный треугольнику, лежащему в основании исходной призмы с коэффициентом подобия 2. Поэтому

$$\frac{S_{\text{осн.исх.призмы}}}{S_{\text{осн.отс.призмы}}} = k^2 = 2^2 = 4.$$

$$\frac{V_{\text{исх}}}{V_{\text{отс}}} = \frac{S_{\text{исх.осн.}} \cdot h}{S_{\text{осн.отс.}} \cdot h}; \quad \frac{32}{V_{\text{отс}}} = 4; \quad V_{\text{отс}} = 8$$

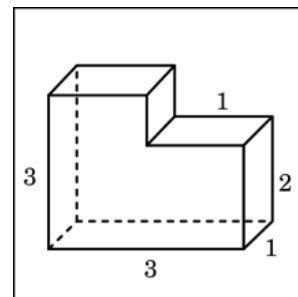
Ответ: 8.

▪ Тест

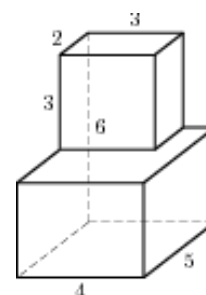
Объем призмы

Вариант 1

- №1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



- №2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

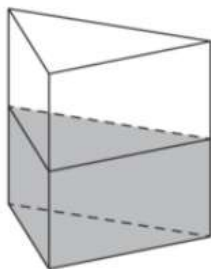


- №3. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 20. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 7. Найдите объем параллелепипеда.
- №4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3, 3 и 24. Найдите ребро равновеликого ему куба.
- №5. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в пять раз?
- №6. Объем куба равен $0,003\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.
- №7. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.
- №8. Объем одного куба в 729 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?
- №9. Объем куба равен 52. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.
- №10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 5.

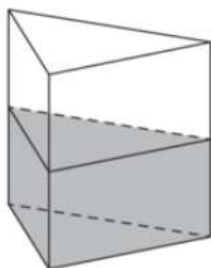
- №11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A, C, D, F, A_1, C_1, D_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 6.

- №12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 7, AD = 5, AA_1 = 10$.

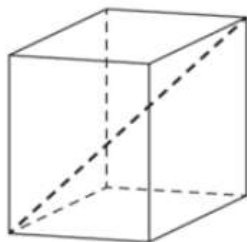
- №13. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см^3 воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 25 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.



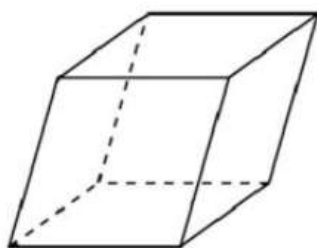
- №14. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 3 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



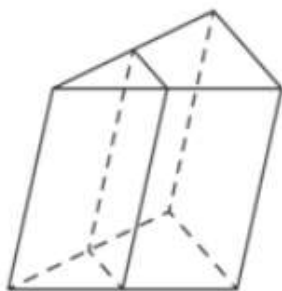
- №15. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{2}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.



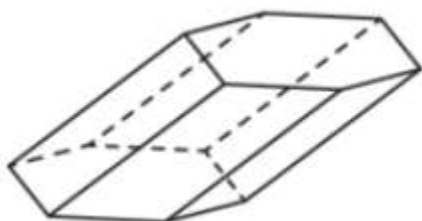
- №16. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 3 и острым углом 30° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 30° и равно 6. Найдите объем параллелепипеда.



- №17. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.

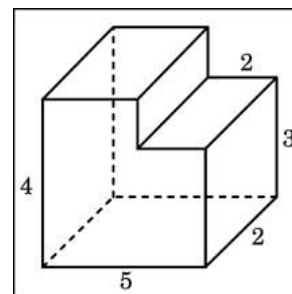


- №18. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 7, а боковые ребра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .

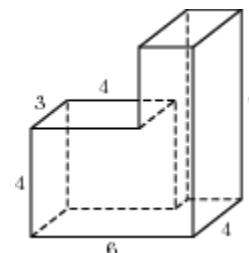


Вариант 2

- №1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



- №2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



- №3. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 21. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.

- №4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 0,5 и 16. Найдите ребро равновеликого ему куба.

- №5. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в шесть раз?

- №6. Объем куба равен $3000\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

- №7. Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его объем увеличится на 63. Найдите ребро куба.

- №8. Объем одного куба в 125 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

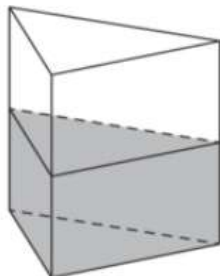
- №9. Объем куба равен 94. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

- №10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки C, D, E, C_1, D_1, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 4.

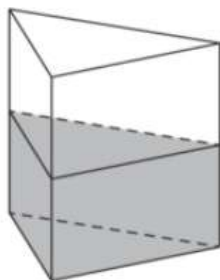
- №11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $B, C, E, F, B_1, C_1, E_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 2.

- №12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, C_1, D_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 9, AD = 4, AA_1 = 10$.

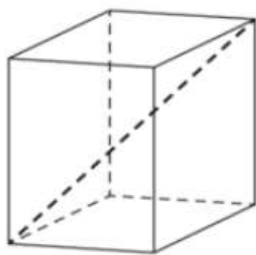
- №13. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 см^3 воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 22 см. найдите объем детали. Ответ дайте в куб. см.



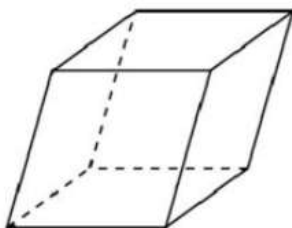
- №14. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, уровень жидкости достигает 4 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, сторона основания которого в 2 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.



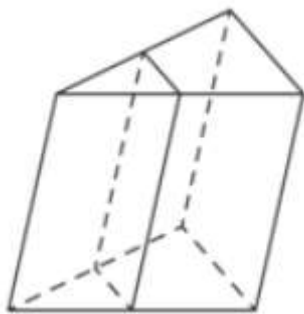
- №15. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.



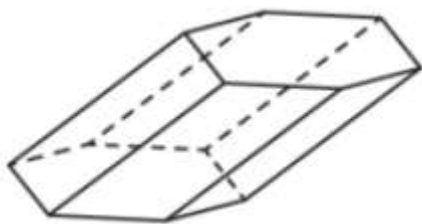
- №16. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 4 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 7. Найдите объем параллелепипеда.



- №17. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 40, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной призмы.



- №18. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые ребра равны $4\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .



▪ **Ответы (тест)**

Объем призмы

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Вар.1	8	78	140	6	125	0,3	17	81	6,5	2,5	28	175
Вар.2	36	104	63	2	216	30	1	25	11,75	2,5	12	180
	№13	№14	№15	№16	№17	№18						
Вар.1	375	5	0,5	1,5	20	882						
Вар.2	190	1	1,5	84	10	144						