

Математическое ожидание случайной величины

■ Примеры

- №1. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

- №2. Вычислите математическое ожидание случайной величины X , если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0,2 & 0,25 & 0,15 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

- №3. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0,2 & 0,15 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $2 < Y \leq 11$.

- №4. Всего выпущено 10 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

Выигрыш	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Число выигрышных билетов	100	50	10	2	1

Найдите математическое ожидание случайной величины "выигрыш на один билет", который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.

- №5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

- №6. В пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 9 штук или 12 штук. Известно, что в среднем 72 покупателя из 100 эту воду не покупают, 14 покупают одну бутылку, 9 человек - упаковку, в которой 9 бутылок и 5 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок. Найдите математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке".

- №7. Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 700 тысяч рублей. Вероятность события "выплата по отдельно взятому договору" равна 0,02. Математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.

- №8. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции принцесс. Всего в коллекции 8 различных принцесс, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди принцесс есть Золушка. Первоклассница покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся две Золушки? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.
-
- №9. Монету подбрасывают 13 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.
-
- №10. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.
-
- №11. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет три раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.
-
- №12. Игральный кубик бросают до тех пор, пока шестерка не выпадет два раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».
-
- №13. Правильную игральную кость бросают до тех пор, пока грани с 1, 2, 3 и 4 очками не выпадут хотя бы по одному разу. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

Решение (примеры) Математическое ожидание случайной величины

- №1. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

- №2. Вычислите математическое ожидание случайной величины X , если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0,2 & 0,25 & 0,15 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$

$$EX = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,3 = 3,3.$$

Ответ: 3,3.

- №3. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0,2 & 0,15 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Найдите вероятность события $2 < Y \leq 11$.

Вероятность события случайной величины Y равна

$$P(2 < Y \leq 11) = P(Y = 4) + P(Y = 6) + P(Y = 8) + P(Y = 10) = 0,05 + 0,25 + 0,1 + 0,25 = 0,65.$$

Ответ: 0,65.

- №4. Всего выпущено 10 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

Выигрыш	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Число выигрышных билетов	100	50	10	2	1

Найдите математическое ожидание случайной величины "выигрыш на один билет", который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.

Пусть X – случайная величина "выигрыш на один билет". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Вероятность выигрыша p_i	$\frac{100}{10000} = 0,01$	$\frac{50}{10000} = 0,005$	$\frac{10}{10000} = 0,001$	$\frac{2}{10000} = 0,0002$	$\frac{1}{10000} = 0,0001$

Математическое ожидание выигрыша: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$,

$$EX = 100 \cdot 0,01 + 1000 \cdot 0,005 + 5000 \cdot 0,001 + 10\,000 \cdot 0,0002 + 50\,000 \cdot 0,0001 = 1 + 5 + 5 + 2 + 5 = 18.$$

Ответ: 18.

- №5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

Пусть X — случайная величина "выигрыш на один билет". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	10 р.	50 р.	100 р.	5000 р.
Вероятность выигрыша p_i	$\frac{990}{1000} = 0,99$	$\frac{6}{1000} = 0,006$	$\frac{3}{1000} = 0,003$	$\frac{1}{1000} = 0,001$

Математическое ожидание выигрыша: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$,

$$EX = 10 \cdot 0,99 + 50 \cdot 0,006 + 100 \cdot 0,003 + 5000 \cdot 0,001 = 9,9 + 0,3 + 0,3 + 5 = 15,5$$

Поскольку цена лотерейного билета равна 50 рублей, а математическое ожидание выигрыша равно 15,5 рублей, то цена билета на 34,5 рублей выше, чем её математическое ожидание.

$$50 - 15,5 = 34,5$$

Ответ: 34,5.

- №6. В пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 9 штук или 12 штук. Известно, что в среднем 72 покупателя из 100 эту воду не покупают, 14 покупают одну бутылку, 9 человек — упаковку, в которой 9 бутылок и 5 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок. Найдите математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке".

Пусть X — случайная величина "количество бутылок в одной покупке". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	0	1	9	12
Вероятность покупки одним покупателем p_i	$\frac{72}{100} = 0,72$	$\frac{14}{100} = 0,14$	$\frac{9}{100} = 0,09$	$\frac{5}{100} = 0,05$

Математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке":

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4, \quad EX = 0 \cdot 0,72 + 1 \cdot 0,14 + 9 \cdot 0,09 + 12 \cdot 0,05 = 0,14 + 0,81 + 0,6 = 1,55.$$

Ответ: 1,55.

- №7. Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 700 тысяч рублей. Вероятность события "выплата по отдельно взятому договору" равна 0,02. Математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.

Пусть y — стоимость полиса для клиента. Случайная величина X — "доход страховой компании от продажи одного полиса", которая может принимать два значения:

- Если страховой случай не наступил (вероятность $1 - 0,02 = 0,98$), то компания получает стоимость полиса, то есть доход равен y .
- Если страховой случай наступил (вероятность $0,02$), то компания получает стоимость полиса, но должна выплатить 700 000 рублей. Доход равен $(y - 700\,000)$.

Составим таблицу распределения случайной величины X .

Значение X	y	$(y - 700\,000)$
Вероятность P	0,98	0,02

По условию математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей, тогда составим уравнение: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2$,

$$1000 = y \cdot 0,98 + (y - 700\,000) \cdot 0,02 \quad y = 15\,000.$$

Ответ: 15 000.

№8. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции принцесс. Всего в коллекции 8 различных принцесс, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди принцесс есть Золушка. Первоклассница покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся две Золушки? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Всего в коллекции 8 различных принцесс. Все принцессы встречаются с одинаковой вероятностью, значит вероятность покупки Золушки в одном киндер-сюрпризе равна $p = \frac{1}{8}$. Нужно собрать ровно 2 Золушки. Количество купленных киндер-сюрпризов - это случайная величина. Математическое ожидание $E(X)$ количества испытаний (покупок), необходимых для получения k успехов (в нашем случае $k = 2$ Золушки), при вероятности успеха p вычисляется по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Таким образом, $k = 2$ (нужно две Золушки), $p = \frac{1}{8}$ (вероятность появления Золушки в покупке одного киндер-сюрприза) и тогда $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 2 \cdot 8 = 16$.

Ответ: 16.

№9. Монету подбрасывают 13 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

Рассмотрим один любой бросок монеты. С вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 1 орел, с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 0 орлов. Математическое ожидание количества орлов при одном броске равно: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, при 13 бросках математическое ожидание количества орлов равно $13 \cdot \frac{1}{2} = 6,5$. Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, то для получения ответа достаточно 13 раз просуммировать математическое ожидание орлов при однократном броске.

Ответ: 6,5.

№10. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (подбрасывают монету) проводят до тех пор, пока "орел" не выпадет два раза, значит, количество успехов $k = 2$.

Вероятность выпадения «орла» при одном броске монеты равна $\frac{1}{2}$, значит, $p = \frac{1}{2}$.

Тогда получим: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

2-й способ.

Пусть X_1 – число бросков для 1-го орла, X_2 – число бросков для 2-го орла. Вероятности выпадения при одном броске «решки» или «орла» одинаковы и равны $\frac{1}{2}$ и эти события независимы.

Число бросков X_1	1	2	3	4	...	n
	O	PO	PPO	PPPO	...	PP...PO
Вероятность P_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$		$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Аналогично, можно составить таблицу и для X_2 . Математическое ожидание числа бросков

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2 \cdot EX_1 = 2 \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots \right).$$

$$EX_1 = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_3} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{S_4} + \dots$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$EX_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2; \quad E(X_1 + X_2) = 2EX_1 = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4.

№11. Монету подбрасывают до тех пор, пока орел не выпадет три раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно

вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (подбрасывают монету) проводят до тех пор, пока "орел" не выпадет три раза, значит, количество успехов $k = 3$.

Вероятность выпадения «орла» при одном броске монеты равна $\frac{1}{2}$, значит, $p = \frac{1}{2}$.

Тогда получим: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

2-й способ.

Пусть X_1 – число бросков для 1-го орла, X_2 – число бросков для второго орла, X_3 – число бросков для третьего орла. По аналогии с решением задачи №16 получим, что $EX_1 = EX_2 = EX_3 = 2$, тогда математическое ожидание числа бросков равно $E(X_1 + X_2 + X_3) = EX_1 + EX_2 + EX_3 = 3 \cdot EX_1 = 3 \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

№12. Игральный кубик бросают до тех пор, пока шестерка не выпадет два раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно

вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (бросают кубик) проводят до тех пор, пока "шестерка" не выпадет два раза, значит, количество успехов $k = 2$.

Вероятность выпадения «шестерки» при одном броске кубика равна $\frac{1}{6}$, значит, $p = \frac{1}{6}$.

Тогда получим: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

2-й способ.

Пусть X_1 — число бросков до 1-й шестерки, X_2 — число бросков до 2-й шестерки. Вероятность выпадения при одном броске «шестерки» равна $\frac{1}{6}$, а вероятность выпадения других граней равна $\frac{5}{6}$.

Число бросков X_1	1	2	3	4	...	n
Вероятность P_{X_1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$		$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

Аналогично, можно составить таблицу и для X_2 . Математическое ожидание числа бросков

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2 \cdot EX_1 = 2 \left(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right)$$

$$EX_1 = \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots}_{S_2} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots}_{S_3} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots}_{S_4}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$S_3 = \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1 - \frac{5}{6}} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2 \cdot EX_1 = 2 \left(1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 2 \cdot 6 = 12$$

Ответ: 12.

№13. Правильную игральную кость бросают до тех пор, пока грани с 1, 2, 3 и 4 очками не выпадут хотя бы по одному разу. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно

вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (бросают игральную кость) проводят до тех пор, пока грани с 1, 2, 3 и 4 очками не выпадут хотя бы по одному разу, значит, количество успехов $k = 4$.

Вероятность выпадения грани с 1, 2, 3 и 4 очками при одном броске игральной кости равна $\frac{4}{6}$, значит,

$$p = \frac{4}{6}. \text{ Тогда получим: } E(X) = \frac{k}{p} = \frac{4}{\frac{4}{6}} = \frac{4}{1} = 6.$$

Ответ: 6.

2-й способ.

Пусть X — число бросков игральной кости до выпадения нужной грани. Вероятность выпадения грани с 1, 2, 3 и 4 очками равна $\frac{4}{6}$, вероятность выпадения грани с 5 и 6 очками равна $\frac{2}{6}$.

Число бросков X	1	2	3	4	...	n
Вероятность P_x	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6}$	$\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2$	$\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3$		$\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}$

Математическое ожидание числа бросков

$EX =$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \frac{4}{6} + 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \dots = \\
 &= \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \dots \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_1} \\
 &\quad + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \dots \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_2} \\
 &\quad + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \dots \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{S_3}
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{\frac{4}{6}}{1 - \frac{2}{6}} = 1$$

$$S_2 = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6}}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{2}{6}$$

$$S_3 = \frac{\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2}{1 - \frac{2}{6}} = \left(\frac{2}{6}\right)^2$$

$$EX = 1 + \frac{2}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{6}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Ответ: 1,5.

■ Тест

- №1. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

- №2. Вычислите математическое ожидание случайной величины X , если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0,35 & 0,15 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

- №3. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,2 & 0,15 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $3 < Y < 6$.

- №4. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,25 & 0,25 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $0 < Y \leq 4$.

- №5. Всего выпущено 50 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

Выигрыш	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Число выигрышных билетов	1000	100	50	10	2

Найдите математическое ожидание случайной величины "выигрыш на один билет", который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.

- №6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Количество билетов	990	5	4	1

- №6. В пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 8 штук или 12 штук. Известно, что в среднем 76 покупателя из 100 эту воду не покупают, 12 покупают одну бутылку, 4 человека - упаковку, в которой 8 бутылок и 8 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок. Найдите математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке".

- №8. Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 900 тысяч рублей. Вероятность события "выплата по отдельно взятому договору" равна 0,01. Математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.

- №9. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции бегемотов. Всего в коллекции 12 различных бегемотов, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди них есть бегемот в кепке. Первоклассник покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся два одинаковых бегемота в кепке? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.
-
- №10. Монету подбрасывают 6 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.
-
- №11. Игральный кубик бросают до тех пор, пока два раза не выпадет четное число очков, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».
-
- №12. Игральный кубик бросают до тех пор, пока число очков, кратное трем, не выпадет три раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

▪ **Ответы (тест)** Математическое ожидание случайной величины

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
-0,1	3,7	0,35	0,85	13	85,2	1,4	10 000	24	3	4	9

Решение (тест) Математическое ожидание случайной величины

№1. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -5 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Ответ: - 0,1.

№2. Вычислите математическое ожидание случайной величины X , если известно её распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0,35 & 0,15 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$

$$EX = 0 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 = 3,7.$$

Ответ: 3,7.

№3. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,2 & 0,15 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $3 < Y < 6$.

Вероятность события случайной величины Y равна $P(3 < Y < 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = 0,25 + 0,1 = 0,35$.

Ответ: 0,35.

№4. Известно, что случайная величина Y подчиняется распределению:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,25 & 0,25 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $0 < Y \leq 4$.

Вероятность события случайной величины Y равна

$$P(0 < Y \leq 4) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,15 = 0,85.$$

Ответ: 0,85.

№5. Всего выпущено 50 000 лотерейных билетов. Сумма выигрышей и число выигрышных билетов показаны в таблице.

Выигрыш	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Число выигрышных билетов	1000	100	50	10	2

Найдите математическое ожидание случайной величины "выигрыш на один билет", который получит один случайный покупатель лотерейного билета. Ответ дайте в рублях.

Пусть X – случайная величина "выигрыш на один билет". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	100 р.	1000 р.	5000 р.	10 тыс. р.	50 тыс. р.
Вероятность выигрыша p_i	$\frac{1000}{50000} = 0,02$	$\frac{100}{50000} = 0,002$	$\frac{50}{50000} = 0,001$	$\frac{10}{50000} = 0,0002$	$\frac{2}{50000} = 0,00004$

Математическое ожидание выигрыша: $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5$,

$$EX = 100 \cdot 0,02 + 1000 \cdot 0,002 + 5000 \cdot 0,001 + 10\,000 \cdot 0,0002 + 50\,000 \cdot 0,00004 = 2 + 2 + 5 + 2 + 2 = 13.$$

Ответ: 13.

№6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Количество билетов	990	5	4	1

Пусть X — случайная величина "выигрыш на один билет". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	20 р.	1000 р.	10 000 р.	50 000 р.
Вероятность выигрыша p_i	$\frac{990}{1000} = 0,99$	$\frac{5}{1000} = 0,005$	$\frac{4}{1000} = 0,004$	$\frac{1}{1000} = 0,001$

Математическое ожидание выигрыша: $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5$,

$$EX = 20 \cdot 0,99 + 1000 \cdot 0,005 + 10000 \cdot 0,004 + 50000 \cdot 0,001 = 19,8 + 5 + 40 + 50 = 114,8$$

Поскольку цена лотерейного билета равна 200 рублей, а математическое ожидание выигрыша равно 114,8 рублей, то цена билета на 85,2 рублей выше, чем её математическое ожидание.

$$200 - 114,8 = 85,2$$

Ответ: 85,2.

№7. В пластиковые бутылки с питьевой водой продаются поштучно, либо упаковками по 8 штук или 12 штук. Известно, что в среднем 76 покупателя из 100 эту воду не покупают, 12 покупают одну бутылку, 4 человека - упаковку, в которой 8 бутылок и 8 человек берут упаковку, в которой 12 бутылок. Найдите математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке".

Пусть X — случайная величина "количество бутылок в одной покупке". Составим таблицу распределения этой случайной величины.

Значение x_i	0	1	8	12
Вероятность покупки одним покупателем p_i	$\frac{76}{100} = 0,76$	$\frac{12}{100} = 0,12$	$\frac{4}{100} = 0,04$	$\frac{8}{100} = 0,08$

Математическое ожидание случайной величины "количество бутылок в одной покупке" :

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4, \quad EX = 0 \cdot 0,76 + 1 \cdot 0,12 + 8 \cdot 0,04 + 12 \cdot 0,08 = 0,12 + 0,32 + 0,96 = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

№8. Страховая компания заключает с клиентами страховые договоры (полисы). При наступлении страхового случая клиент получает выплату 900 тысяч рублей. Вероятность события "выплата по отдельно взятому договору" равна 0,01. Математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей. Найдите стоимость полиса в рублях.

Пусть y — стоимость полиса для клиента. Случайная величина X — "доход страховой компании от продажи одного полиса", которая может принимать два значения:

- Если страховой случай не наступил (вероятность $1 - 0,01 = 0,99$), то компания получает стоимость полиса, то есть доход равен y .
- Если страховой случай наступил (вероятность 0,01), то компания получает стоимость полиса, но должна выплатить 900 000 рублей. Доход равен $(y - 900\,000)$.

Составим таблицу распределения случайной величины X .

Значение X	y	$(y - 900\,000)$
Вероятность P	0,99	0,01

По условию математическое ожидание случайной величины "доход страховой компании от продажи одного полиса" равно 1000 рублей, тогда составим уравнение: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2$,

$$1000 = y \cdot 0,99 + (y - 900\,000) \cdot 0,01 \quad y = 10\,000.$$

Ответ: 10 000.

№9. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции бегемотов. Всего в коллекции 12 различных бегемотов, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди них есть бегемот в кепке. Первоклассник покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся два одинаковых бегемота в кепке? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Всего в коллекции 12 различных бегемотов. Все бегемоты встречаются с одинаковой вероятностью, значит вероятность покупки бегемота в кепке в одном киндер-сюрпризе равна $p = \frac{1}{12}$. Нужно собрать ровно 2 бегемота в кепке. Количество купленных киндер-сюрпризов - это случайная величина. Математическое ожидание $E(X)$ количества испытаний (покупок), необходимых для получения k успехов (в нашем случае $k = 2$ бегемота в кепке), при вероятности успеха p вычисляется по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Таким образом, $k = 2$ (нужно два бегемота в кепке), $p = \frac{1}{12}$ (вероятность появления бегемота в кепке в покупке одного киндер-сюрприза) и тогда $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 2 \cdot 12 = 24$.

Ответ: 24.

№10. Монету подбрасывают 6 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

Рассмотрим один любой бросок монеты. С вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 1 орел, с вероятностью $\frac{1}{2}$ выпадет 0 орлов. Математическое ожидание количества орлов при одном броске равно: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, при 6 бросках математическое ожидание количества орлов равно $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, то для получения ответа достаточно 6 раз просуммировать математическое ожидание орлов при однократном броске.

Ответ: 3.

№11. Игральный кубик бросают до тех пор, пока два раза не выпадет четное число очков, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (бросают кубик) проводят до тех пор, пока два раза не выпадет четное число очков, значит, количество успехов $k = 2$.

Вероятность выпадения четного числа очков (2, 4 и 6) при одном броске кубика равна $\frac{3}{6}$, значит, $p = \frac{3}{6}$.

Тогда получим: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{2}{\frac{3}{6}} = 2 \cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

2-й способ.

Пусть X_1 — число бросков до 1-го выпадения грани с четным числом очков, X_2 — число бросков до 2-го выпадения грани с четным числом очков. Вероятность выпадения граней с четным числом 2, 4 или 6 очков равна $\frac{3}{6}$, вероятность выпадения граней с нечетным числом очков 1, 3, или 5 тоже равна $\frac{3}{6}$.

Число бросков X_1	1	2	3	4	...	n
Вероятность P_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$		$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Математическое ожидание числа бросков равно $EX_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots$

$$\begin{array}{c}
 EX_1 = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_1} \\
 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_2} \\
 + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{S_3} \\
 + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{S_4}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S = \frac{b_1}{1-q} \\
 S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S_3 = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S_4 = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}
 \end{array}$$

$EX_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Аналогично, для X_2 , тогда математическое ожидание случайной

величины "число сделанных бросков" равно $EX = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 2 + 2 = 4$.

Ответ: 4.

№12. Игральный кубик бросают до тех пор, пока число очков, кратное трем, не выпадет три раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

1-й способ.

Математическое ожидание числа испытаний для получения k успехов при вероятности успеха p можно

вычислить по формуле: $E(X) = \frac{k}{p}$.

Испытания (бросают кубик) проводят до тех пор, пока число очков, кратное трем, не выпадет три раза, значит, количество успехов $k = 3$.

Вероятность выпадения числа очков, кратное трем (3 и 6) при одном броске кубика равна $\frac{2}{6}$, значит, $p = \frac{2}{6}$.

Тогда получим: $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{3}{\frac{2}{6}} = 3 \cdot 3 = 9$.

Ответ: 9.

2-й способ.

Пусть X_1 — число бросков до 1-го выпадения грани с числом очков, кратных трем: 3 или 6, X_2 — число бросков до 2-го выпадения грани с числом очков, кратных трем, X_3 — число бросков до 3-го выпадения грани с числом очков, кратных трем. Вероятность выпадения граней с числом очков, кратных трем, равна $\frac{2}{6}$, вероятность выпадения остальных граней равна $\frac{4}{6}$.

Число бросков X_1	1	2	3	4	...	n
Вероятность P_{X_1}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$		$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Математическое ожидание числа бросков равно $EX_1 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$

$$\begin{aligned}
 EX_1 &= \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots}_{S_1} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots}_{S_2} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots}_{S_3} + \dots
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$EX_1 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$. Аналогично, для X_2 и X_3 , тогда математическое ожидание случайной

величины "число сделанных бросков" равно $EX = E(X_1 + X_2 + X_3) = EX_1 + EX_2 + EX_3 = 3 \cdot 3 = 9$.

Ответ: 9.