

Схема испытаний Бернулли

- №1. Биатлонист по одному разу стреляет по пяти мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист 4 раза попадет в мишени и один раз промахнется. Результат округлите до сотых.
-
- №2. В тире стрелок стреляет по 10 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность попасть в каждую из них равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «будут поражены ровно 3 мишени» меньше вероятности события «будут поражены ровно 5 мишеней»?
-
- №3. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?
-
- №4*. Стрелок стреляет по трем мишеням. Вероятность попадания в мишень первым выстрелом равна 0,5. Если стрелок промахнулся, он может выстрелить по мишени второй раз. Вероятность попадания в мишень вторым выстрелом равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно одну мишень из трех.
-
- №5*. Участнику отборочного тура соревнований по стрельбе на поражение четырех мишеней дается 5 патронов. Участник выходит в основной тур соревнований, если он поразит все мишени. Стрелок вышел в основной тур. Найдите вероятность того, что он поразил все мишени с первого раза, если для него вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,6. Ответ округлите до тысячных.
-
- №6*. Участнику отборочного тура соревнований по стрельбе на поражение трех мишеней дается 4 патрона. Участник выходит в основной тур соревнований, если он поразит все мишени. Стрелок вышел в основной тур. Найдите вероятность того, что он использовал все патроны, если для него вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,8.
-
- №7. В магазине куплено 12 одинаковых луковиц гиацинтов. Вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастет, равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «прорастет ровно 7 луковиц» больше вероятности события «прорастет ровно 5 луковиц»?
-
- №8*. Остап Бендер проводит сеанс одновременной игры с любителями шахмат города Васюки на 10 досках. Перед началом с помощью жребия игроки определяют, кто играет белыми, а кто - черными на каждой из десяти досок. Во сколько раз вероятность события «Остап будет играть белыми на 8 досках» больше вероятности события «Остап будет играть белыми на 9 досках»?
-
- №9. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.
-
- №10*. Участникам отборочного тура олимпиады по истории предлагается пять вопросов. Для того, чтобы пройти на основной тур, необходимо верно ответить на три вопроса. Если уже получено три верных ответа, следующие вопросы не задаются. Какова вероятность того, что Иван пройдет на основной тур, если вероятность правильного ответа на любой вопрос для него равна 0,6.

Решение (примеры)

Схема испытаний Бернулли

№.1 Биатлонист по одному разу стреляет по пяти мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист 4 раза попадет в мишени и один раз промахнется. Результат округлите до сотых.

Биатлонист делает 5 выстрелов по разным мишеням. Вероятность попадания $p=0,8$, промаха $q=1-0,8=0,2$. Нужно найти вероятность того, что он попадет ровно 4 раза (и один раз промахнется).

Количество способов выбрать, в каком из $n=5$ выстрелов будет $k=4$ попадания: $C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$

Формула Бернулли: вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

$$P(S=k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad P(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096 \approx 0,41. \quad \text{Ответ: } 0,41.$$

Замечание: целесообразно обратить внимание учащихся на принципиальное отличие в постановке задач.

Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Есть только два исхода события «биатлонист стреляет в мишень»: A — попал, $P(A) = 0,6$ и $\bar{A}$ — промахнулся,

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$. Порядок попадания и промаха определен. События независимые, поэтому их

вероятности умножаем: $\underbrace{0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6}_{\text{3 раза попал по мишени}} \cdot \underbrace{0,4}_{\text{1 раз промахнулся}} = 0,0864 \approx 0,09. \quad \text{Ответ: } 0,09.$

№2. В тире стрелок стреляет по 10 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность попасть в каждую из них равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «будут поражены ровно 3 мишени» меньше вероятности события «будут поражены ровно 5 мишеней»?

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p вычисляется по формуле: $P(S=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В нашем случае $n=10$ (количество испытаний), $p_{\text{успех}} = 0,5$ (вероятность попадания в мишень), $q_{\text{поражение}} = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$ (вероятность промаха), $k_1 = 3$ (количество успехов в первом эксперименте), $k_2 = 5$ (количество успехов во втором эксперименте).

Вероятность события «будут поражены ровно 3 мишени» равна

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot p^3 \cdot q^7 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot 0,5^{10}.$$

Вероятность события «будут поражены ровно 5 мишеней» равна

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot p^5 \cdot q^5 = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0,5^{10}.$$

$$\frac{P_{10}(5)}{P_{10}(3)} = \left(\frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0,5^{10} \right) : \left(\frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot 0,5^{10} \right) = \frac{7! \cdot 3!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{10} = 2,1.$$

Ответ: 2,1.

- №3. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно пять мишеней" больше вероятности события "стрелок поразит ровно четыре мишени"?

Вероятность не поразить каждую отдельную мишень одним выстрелом, равна 0,4, поэтому вероятность не поразить ее двумя независимыми выстрелами, равна $0,4^2 = 0,16$. Значит, получается серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0,84$ и вероятностью бнеудачи $q = 0,16$.

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p : $P = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Найдем искомое отношение:
$$\frac{P(\text{поражены ровно 5 мишеней})}{P(\text{поражены ровно 4 мишени})} = \frac{C_5^5 \cdot p^5}{C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1} = \frac{p \cdot 4!}{q \cdot 5!} = \frac{0,84}{0,16 \cdot 5} = 1,05.$$

Ответ: 1,05.

- №4*. Стрелок стреляет по трем мишеням. Вероятность попадания в мишень первым выстрелом равна 0,5. Если стрелок промахнулся, он может выстрелить по мишени второй раз. Вероятность попадания в мишень вторым выстрелом равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно одну мишень из трех.

Вероятность поразить одну мишень $P(\text{поражение одной мишени}) = 0,5 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,8$.

$\begin{matrix} \text{попал с 1-го} & & \text{промах на 1-м} & & \text{попал со 2-го} \\ \text{выстрела} & & \text{выстреле} & & \text{выстрела} \end{matrix}$

Вероятность того, что мишень не поражена (промах дважды) $P(\text{промах дважды}) = 1 - 0,8 = 0,2$ или $0,5 \cdot 0,4 = 0,2$.

$\begin{matrix} \text{промах} & \text{промах} \\ \text{1-й раз} & \text{2-й раз} \end{matrix}$

Вероятность того, что ровно одна мишень поражена их трех ($n=3, k=1, p=0,8, q=0,2$)

$$P = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,096.$$

Ответ: 0,096.

- №5*. Участнику отборочного тура соревнований по стрельбе на поражение четырех мишеней дается 5 патронов. Участник выходит в основной тур соревнований, если он поразит все мишени. Стрелок вышел в основной тур. Найдите вероятность того, что он поразил все мишени с первого раза, если для него вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,6. Ответ округлите до тысячных.

Событие А - это поражение всех мишеней с первого раза. Вероятность такого события $P(A) = 0,6^4$.

Событие В - выход в основной тур, т. е. поражение всех мишеней всеми возможными способами (++++, -++++, +++++, ++++, ++++).

Вероятность такого события $P(B) = 0,6^4 + 0,4 \cdot 0,6^4 \cdot 4 = 0,6^4 (1 + 1,6) = 0,6^4 \cdot 2,6$.

Найдем вероятность события А, при условии, что произошло событие В - условная вероятность $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ где } P(A \cap B) = P(A). \quad P(A|B) = \frac{0,6^4}{0,6^4 \cdot 2,6} = \frac{5}{13} \approx 0,385.$$

Ответ: 0,385.

№6*. Участнику отборочного тура соревнований по стрельбе на поражение трех мишеней дается 4 патрона. Участник выходит в основной тур соревнований, если он поразит все мишени. Стрелок вышел в основной тур. Найдите вероятность того, что он использовал все патроны, если для него вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,8.

Событие А - это поражение трех мишеней с использованием всех четырех патронов (-+++, +---, +++-).

Вероятность такого события $P(A) = 0,2 \cdot 0,8^3 \cdot 3$.

Событие В - выход в основной тур, т. е. поражение всех мишеней всеми возможными способами (-+++, +---, +++-, +++).

Вероятность такого события $P(B) = 0,2 \cdot 0,8^3 \cdot 3 + 0,8^3 = 0,8^3(1 + 0,6) = 0,8^3 \cdot 1,6$.

Найдем вероятность события А, при условии, что произошло событие В - условная вероятность $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ где } P(A \cap B) = P(A).$$

$$P(A|B) = \frac{0,2 \cdot 0,8^3 \cdot 3}{0,8^3 \cdot 1,6} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

№7. В магазине куплено 12 одинаковых луковиц гиацинтов. Вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастет, равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «прорастет ровно 7 луковиц» больше вероятности события «прорастет ровно 5 луковиц»?

Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p вычисляется по формуле: $P(S=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В нашем случае $n=12$ (количество испытаний), $p_{успех} = 0,8$ (вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастет), $q_{поражение} = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$ (вероятность того, что луковица не прорастет), $k_1 = 7$ (количество успехов в первом эксперименте), $k_2 = 5$ (количество успехов во втором эксперименте).

Вероятность события «прорастет ровно 7 луковиц» равна

$$P_{12}(7) = C_{12}^7 \cdot p^7 \cdot q^5 = \frac{12!}{(12-7)! \cdot 7!} \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^5 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^5.$$

Вероятность события «прорастет ровно 5 луковиц» равна

$$P_{12}(5) = C_{12}^5 \cdot p^5 \cdot q^7 = \frac{12!}{(12-5)! \cdot 5!} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^7 = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^7.$$

$$\frac{P_{12}(7)}{P_{12}(5)} = \left(\frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^5 \right) : \left(\frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^7 \right) = \frac{12! \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^5}{5! \cdot 7!} \cdot \frac{7! \cdot 5!}{12! \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^7} = \frac{0,8^2}{0,2^2} = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.

№8*. Остап Бендер проводит сеанс одновременной игры с любителями шахмат города Васюки на 10 досках. Перед началом с помощью жребия игроки определяют, кто играет белыми, а кто - черными на каждой из десяти досок. Во сколько раз вероятность события «Остап будет играть белыми на 8 досках» больше вероятности события «Остап будет играть белыми на 9 досках»?

Жребий - серия из 10 испытаний Бернулли. Успехом в каждом испытании будем считать событие «Остап играет белыми». Вероятность успеха равна $p=0,5$ и вероятность поражения $q=0,5$.

Вероятность события «Остап будет играть белыми на 8 досках»: $P(8) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot q^2$.

Вероятность события «Остап будет играть белыми на 9 досках»: $P(9) = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1$.

$$\text{Искомое отношение равно } \frac{P(8)}{P(9)} = \frac{C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot q^2}{C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1} = \frac{10!}{8! \cdot (10-8)!} \cdot \frac{9! \cdot (10-9)!}{10!} \cdot \frac{q}{p} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

№9. Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придется купить еще 2 или 3 шоколадных яйца.

В Машинной коллекции не хватает 8 различных принцесс. Значит, вероятность того, что при следующей покупке Маше попадется одна из отсутствующих принцесс, равна 0,8. Получается серия независимых испытаний до первого успеха с вероятностью успеха $p=0,8$ и неудачи $q=0,2$. Вероятность того, что успех случится со второй или с третьей попытки, равна

$$\overbrace{q \cdot p}^{\text{покупка двух яиц}} + \overbrace{q \cdot q \cdot p}^{\text{покупка трех яиц}} = pq + pq^2 = 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2^2 = 0,192.$$

первая попытка
неудача
вторая попытка
успех
первая попытка
неудача
вторая попытка
неудача
третья попытка
успех

Ответ: 0,192.

№10*. Участникам отборочного тура олимпиады по истории предлагается пять вопросов. Для того, чтобы пройти на основной тур, необходимо верно ответить на три вопроса. Если уже получено три верных ответа, следующие вопросы не задаются. Какова вероятность того, что Иван пройдет на основной тур, если вероятность правильного ответа на любой вопрос для него равна 0,6.

Рассмотрим все возможные варианты сочетания правильных и неправильных ответов.

- 1) Ответил сразу на три вопроса правильно (+++). Вероятность такого события равна $0,6^3$.
- 2) На один вопрос ответил неправильно, а на три - правильно (-+++, ++-+, +++-). Вероятность такого события равна $0,4 \cdot 0,6^3 \cdot 3$.
- 3) На два вопроса ответил неправильно (--+++, +-+++, ++-+, -+-+, -++-, +-+-+). Или, учитывая, что последний ответ на вопрос всегда должен быть правильным, то можно посчитать сколькими способами надо

расставить 2 минуса по четырем позициям: $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$.

Вероятность такого события равна $0,4^2 \cdot 0,6^3 \cdot 6$.

Тогда вероятность того, что Иван пройдет в основной тур равна

$$0,6^3 + 0,4 \cdot 0,6^3 \cdot 3 + 0,4^2 \cdot 0,6^3 \cdot 6 = 0,6^3 \cdot (1 + 1,2 + 0,96) = 0,216 \cdot 3,16 = 0,68256.$$

Ответ: 0,68256.

Тест

Схема испытаний Бернулли

- №1. Биатлонист по одному разу стреляет по пяти мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист 4 раза попадет в мишени и один раз промахнется. Результат округлите до сотых.
- №2. Стрелок в тире стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события "стрелок поразит ровно три мишени" больше вероятности события "стрелок поразит ровно две мишени"?
- №3*. Стрелок стреляет по трем мишеням. Вероятность попадания в мишень первым выстрелом равна 0,5. Если стрелок промахнулся, он может выстрелить по мишени второй раз. Вероятность попадания в мишень вторым выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно две мишени из трех.
- №4*. Участнику отборочного тура соревнований по стрельбе на поражение пяти мишеней дается 6 патронов. Участник выходит в основной тур соревнований, если он поразит все мишени. Стрелок вышел в основной тур. Найдите вероятность того, что он использовал все патроны, если для него вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,9. Ответ округлите до тысячных.
- №5. При мелкосерийном изготовлении деталей на фрезерном станке вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,2 независимо от других деталей. Всего в партии 21 деталь. Во сколько раз вероятность события «ровно одна деталь из партии бракованная» меньше вероятности события «ровно две детали из партии бракованные»?
- №6. Баскетболист на тренировке бросает мяч в кольцо 12 раз. Вероятность попадания при каждой отдельной попытке равна 0,4. Во сколько раз вероятность события «ровно 4 попадания» больше вероятности события «ровно 3 попадания»?
- №7*. Остап Бендер проводит сеанс одновременной игры с любителями шахмат города Васюки на 6 досках. Перед началом с помощью жребия игроки определяют, кто играет белыми, а кто - черными на каждой из шести досок. Во сколько раз вероятность события «Остап будет играть белыми на 2 досках» больше вероятности события «Остап будет играть белыми на 1 доске»?
- №8. Даша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Даши уже есть восемь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Даше придется купить еще 1 или 2 шоколадных яйца.
- №9*. Участникам отборочного тура олимпиады по истории предлагается пять вопросов. Для того, чтобы пройти на основной тур, необходимо верно ответить на два вопроса. Если уже получено два верных ответа, следующие вопросы не задаются. Какова вероятность того, что Иван пройдет на основной тур, если вероятность правильного ответа на любой вопрос для него равна 0,5.

Ответы (тест)

Схема испытаний Бернулли

№1	№2	№3*	№4*	№5	№6	№7*	№8	№9
0,26	3	0,243	0,333	2,5	1,5	2,5	0,36	0,8125