

О пересечении независимых событий

■ Примеры

- №1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
-
- №2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
-
- №3. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.
-
- №4. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,87. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,92. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
-
- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
-
- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
-
- №7. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
-
- №8. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,19. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
-
- №9. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в "Шеш-беш": гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.
-
- №10. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем - 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?
-
- №11. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?
-
- №12*. По условиям лотереи выигрышных билетов в ней всего на 20% меньше, чем билетов без выигрыша. Какое наименьшее количество билетов нужно купить, чтобы среди них с вероятностью больше, чем 0,75, оказался выигрышный билет?

№13. Чтобы поступить в институт на специальность "Лингвистика", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность "Коммерция", нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному языку - 0,7 и по обществознанию - 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

№14. В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

■ Решение (примеры) О пересечении независимых событий

№1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Пусть событие A_1, A_2, A_3 означают - «в данный момент соответствующий продавец занят», а вероятность этого события, по условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,7$. Искомая вероятность:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,7^3 = 0,343.$$

Ответ: 0,343.

№2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

События «шахматист А. выигрывает у шахматиста Б. белыми или черными фигурами» независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому надо найти пересечение независимых событий, их вероятности умножаются: $0,5 \cdot 0,34 = 0,17$.

Ответ: 0,17.

№3. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Есть только два исхода события «биатлонист стреляет в мишень: A – попал, $P(A) = 0,6$ и $\bar{A}$ – промахнулся, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$. События независимые, поэтому их вероятности

умножаем: $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,0864 \approx 0,09$.

Ответ: 0,09.

3 раза попал по мишени 1 раз промахнулся

- №4. По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,87. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,92. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

A \ B	B	
	Доставит товар	Не доставит товар
Доставит товар	0,92 0,87	0,08 0,87
	0,92 0,13	0,08 0,13

Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А: $P(A) = 0,87$, из магазина Б: $P(B) = 0,92$. Тогда вероятности того, что нужный товар не доставят из магазинов соответственно равны: $P(\bar{A}) = 1 - 0,87 = 0,13$ и $P(\bar{B}) = 1 - 0,92 = 0,08$.

События независимые, поэтому их вероятности умножаем:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,13 \cdot 0,08 = 0,0104.$$

Ответ: 0,0104.

- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,02. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

I \ II	II	
	Исправна	Бракована
Исправна	0,98 0,98	0,02 0,98
	0,98 0,02	0,02 0,02

Вероятность того, что батарейка бракованная: $P(A) = 0,02$. Тогда вероятность противоположного события - «батарейка исправна»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Вероятность того, что две батарейки в упаковке окажутся исправными (события независимые) равна:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,98^2 = 0,9604.$$

Ответ: 0,9604.

- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

I \ II	II	
	Исправен	Неисправен
Исправен	0,88 0,88	0,12 0,88
	0,88 0,12	0,12 0,12

Вероятность того, что платёжный автомат неисправен: $P(A) = 0,12$. Тогда вероятность противоположного события - «автомат исправен»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

Найдём вероятность события «оба автомата неисправны»:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,12^2 = 0,0144.$$

Событие «хотя бы один автомат исправен» противоположно событию «оба автомата неисправны» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0,0144 = 0,9856.$$

Искомую вероятность можно найти другим способом:

$$\underbrace{0,88 \cdot 0,88}_{\text{оба исправны}} + \underbrace{0,88 \cdot 0,12}_{\text{исправен/неисправен}} + \underbrace{0,12 \cdot 0,88}_{\text{неисправен/исправен}} = 0,9856.$$

Ответ: 0,9856.

- №7. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

I \ II	Не перегорела	Перегорела
	Не перегорела	Перегорела
Не перегорела	0,7	0,3
Перегорела	0,3	0,3

Вероятность того, что лампа в фонаре перегорит: $P(A) = 0,3$.

Тогда вероятность противоположного события - «лампа не перегорит»: $P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Найдем вероятность события «обе лампы перегорят в течение года»: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,3^2 = 0,09$.

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит» противоположно событию «обе лампы перегорят» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0,09 = 0,91.$$

Искомую вероятность можно найти другим способом:

$$\underbrace{0,7 \cdot 0,7}_{\text{обе не перегорели}} + \underbrace{0,3 \cdot 0,7}_{\text{перегорела/не перегорела}} + \underbrace{0,7 \cdot 0,3}_{\text{не перегорела/перегорела}} = 0,91.$$

Ответ: 0,91.

- №8. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,19. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Перегорание ламп - события независимые. Найдем вероятность события «все три лампы перегорят в течение одного года»: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,19^3 = 0,006859$.

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит в течение года» противоположно событию «все три лампы перегорят» и его вероятность равна: $P(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - 0,006859 = 0,993141$.

Ответ: 0,993141.

- №9. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в "Шеш-беш": гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

I попытка \ II попытка	Выиграл	Проиграл
	Выиграл	Проиграл
Выиграл	1/18	17/18
Проиграл	1/18	17/18

Всего возможных исходов $6^2 = 36$. Благоприятных исходов (5;6) или (6;5) - два. Вероятность того, что клиент выиграет в одной попытке $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, тогда вероятности проигрыша

равна: $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$. Выиграть или проиграть в двух

попытках события независимые, поэтому их вероятности

умножаем. Ни разу не выиграл в двух попытках: $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18}$. Хотя

бы один раз выиграл: $1 - \left(\frac{17}{18}\right)^2 = \frac{35}{324} \approx 0,108... \approx 0,11$

Ответ: 0,11.

№10. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем - 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0,4 = 0,6$. Вероятность промаха при каждом последующем выстреле равна $1 - 0,6 = 0,4$. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остается непораженной с вероятностью менее $1 - 0,98 = 0,02$.

Вероятность непоражения после второго выстрела равна $0,6 \cdot 0,4 = 0,24$;

После третьего выстрела: $0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$;

После четвертого выстрела: $0,6 \cdot 0,4^3 = 0,0384$;

После пятого выстрела: $0,6 \cdot 0,4^4 = 0,01536 < 0,02$. Значит, всего необходимо пять выстрелов.

Ответ: 5.

№11. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

Вероятность события A "стрелок промахнулся n раз" равна $0,8^n$. Значит, вероятность противоположного события $\bar{A}$ "имея n патронов, стрелок попал в мишень", равна $1 - 0,8^n$. По условию, вероятность поражения мишени должна быть не менее 0,6, тогда составим неравенство: $1 - 0,8^n \geq 0,6$. Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, будем подбирать значения n .

$$n = 1 \quad 1 - 0,8 = 0,2 < 0,6$$

$$n = 2 \quad 1 - 0,8^2 = 0,36 < 0,6$$

$$n = 3 \quad 1 - 0,8^3 = 0,488 < 0,6$$

$$n = 4 \quad 1 - 0,8^4 = 0,5904 < 0,6$$

$$n = 5 \quad 1 - 0,8^5 = 0,67232 > 0,6$$

или можно решить показательное неравенство

$$1 - 0,8^n \geq 0,6$$

$$0,8^n \leq 0,4$$

$$\log_{0,8} 0,8^n \geq \log_{0,8} 0,4$$

$$n \geq \log_{0,8} 0,4 \in (4;5) \Rightarrow n = 5$$

Ответ: 5.

№12*. По условиям лотереи выигрышных билетов в ней всего на 20% меньше, чем билетов без выигрыша. Какое наименьшее количество билетов нужно купить, чтобы среди них с вероятностью больше, чем 0,75, оказался выигрышный билет?

1) Вероятность выигрыша одного билета.

Пусть невыигрышных билетов - 100%, тогда по условию, выигрышных билетов на 20% меньше, т. е. 80%.

Общее количество билетов 180%. Вероятность того, что один купленный билет окажется выигрышным равна

$$P(\text{один выигрышный}) = \frac{0,8}{1,8} = \frac{4}{9}.$$

2) Составим формулу вероятности для n билетов.

Нужно найти наименьшее количество n билетов, чтобы вероятность того, что среди них есть выигрышный, была больше 0,75. Вероятность противоположного события, что все купленные билеты невыигрышные равна

$$P(\text{все невыигрышные}) = (1 - P(\text{один выигрышный}))^n = \left(1 - \frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{5}{9}\right)^n. \text{ Вероятность того, что есть хотя}$$

$$\text{бы один выигрышный билет: } P(\text{есть выигрышный}) = 1 - P(\text{все невыигрышные}) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

3) По условию $1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n > 0,75$, $\left(\frac{5}{9}\right)^n < 0,25$. Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, то перебором найдем наименьшее значение n .

$$n=1 \quad \frac{5}{9} < \frac{1}{4}, \quad \frac{20}{36} < \frac{9}{36} \text{ неверно; } n=2 \quad \left(\frac{5}{9}\right)^2 < \frac{1}{4}, \quad \frac{25}{81} < \frac{1}{4}, \quad \frac{100}{324} < \frac{81}{324} \text{ неверно;}$$

$$n=3 \quad \left(\frac{5}{9}\right)^3 < \frac{1}{4}, \quad \frac{125}{729} < \frac{1}{4}, \quad \frac{500}{729 \cdot 4} < \frac{729}{4 \cdot 729} \text{ верно. Надо купить 3 билета.}$$

Ответ: 3.

- №13.** Чтобы поступить в институт на специальность "Лингвистика", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность "Коммерция", нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов - математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному языку - 0,7 и по обществознанию - 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по математике равна 0,6.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по русскому языку равна 0,8.

Вероятность того, что абитуриент не сможет набрать 70 баллов ни по иностранному языку, ни по обществознанию равна $(1 - 0,7) \cdot (1 - 0,5) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$. Значит, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит более 70 баллов с вероятностью $1 - 0,15 = 0,85$.

Для поступления в институт нужно набрать требуемый балл по математике, по русскому языку и хотя бы по одному из предметов: иностранного языка или обществознания.

Тогда вероятность поступления равна $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,408$.

Ответ: 0,408.

- №14.** В ящике два красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Всего фломастеров 5. Вероятность достать первым красный фломастер равна $\frac{2}{5}$. Поскольку красных фломастеров осталось 1, а всего осталось 4 фломастера, то вероятность достать вторым красный фломастер равна $\frac{1}{4}$. Всего осталось 3 фломастера, синих тоже три. Значит, третий фломастер окажется синий с

вероятностью $\frac{3}{3} = 1$. События "достать первым красный фломастер", "достать вторым красный фломастер" и

"достать третьим синий фломастер" - независимые, поэтому вероятность события "первый раз синий

фломастер появится третьим по счету" равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,1$.

Ответ: 0,1.

■ Тест О пересечении независимых событий

- №1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
-
- №2. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
-
- №3. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
-
- №4. По отзывам покупателей Василий Васильевич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,88. Василий Васильевич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
-
- №5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
-
- №6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,02 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
-
- №7. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,21. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.
-
- №8. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,2, а при каждом последующем - 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95.
-
- №9. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,7?
-
- №10*. По условиям лотереи каждый пятый билет является выигрышным. Какое наименьшее количество билетов нужно купить, чтобы среди них с вероятностью больше, чем 0,5, оказался выигрышный билет?
-
- №11. Чтобы поступить в институт на специальность "Автоматизация", абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и физике. Чтобы поступить на специальность "Механика", нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трех предметов - математике, русскому языку и информатике. Вероятность того, что абитуриент У. получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,4, по русскому языку - 0,5, по физике - 0,3 и по информатике - 0,2. Найдите вероятность того, что У. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
-
- №12. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Примечание: Задания, отмеченные (*), встречались на ЕГКР (Единой городской контрольной работе) в Москве, диагностиках МЦКО или в тренировочных вариантах ЕГЭ.

▪ **Ответы (тест)**

О пересечении независимых событий

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10*	№11	№12
0,125	0,168	0,03	0,024	0,9216	0,9996	0,990739	3	4	4	0,088	0,2