

Пересдача ЕГЭ по математике

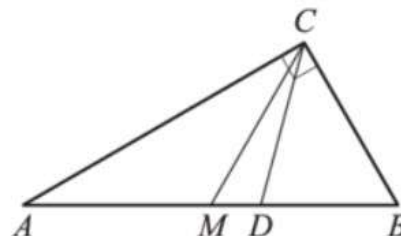
Профильный уровень

11 класс 09.07.2026

Примерный Вариант 1

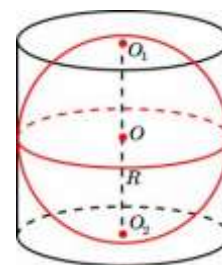
Часть 1

- №1. Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 79° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



- №2. Даны векторы $\vec{a}(17;9)$ и $\vec{b}(5;-3)$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- №3. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



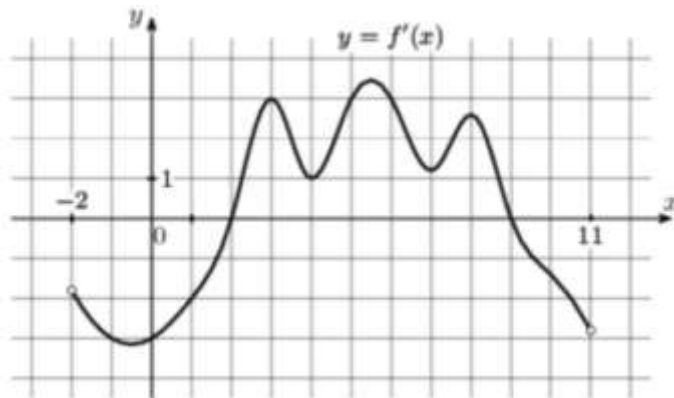
- №4. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трем аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

- №5. Помещение освещается четырьмя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,4. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

- №6. Решите уравнение $\log_2(-4-x) = 7$.

- №7. Найдите значение выражения $\sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12}$.

- №8. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

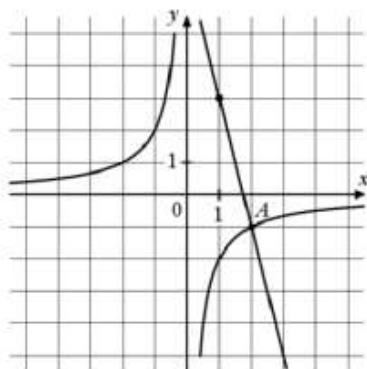


- №9. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \cdot \frac{c + u}{c - v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а } u = 7 \text{ м/с и } v = 5 \text{ м/с — скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости } c \text{ (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике } f \text{ будет не менее 155 Гц?}$$

- №10. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

- №11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



- №12. Найдите точку максимума функции $y = (9 - x)e^{x+9}$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

№14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α .

№15. Решите неравенство $\frac{\log_4(4^x - 128) - \log_4 2^{x+3}}{25x^2 - 180x + 324} \leq 0$.

№16. 15 января планируется взять кредит в банке на 4 месяца в размере S рублей (где S – целое число). Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять часть суммы кредита в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
Долг (в % от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

Найдите наибольшее значение r , при котором сумма всех платежей будет превышать сумму кредита меньше чем на 30%.

№17. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Доказать, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=3$, $AC=5$.

№18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x+3)|x+3| = 2x - a$ имеет два различных решения.

№19. В ящике лежат 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

■ Ответы

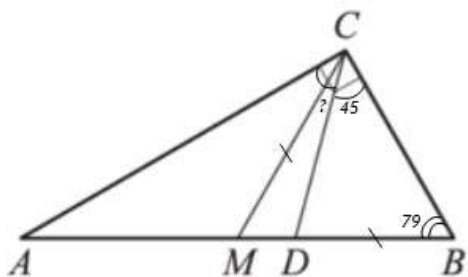
№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
34	58	12	0,04	0,9744	-132	3	9	365	30	-0,25	8

№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19
а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{12} + 2\pi k$; $-\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$; б) $-\frac{47\pi}{12}$; $-\frac{15\pi}{4}$	$16 + \sqrt{137}$	$(3,5; 3,6); (3,6; 4]$	10	$\frac{2\sqrt{39}}{3}$	$a \in \{-7; -5\}$	а) нет; б) нет; в) 857 г..

■ Решение

Часть 1

- №1. Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 79° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Решение:

В прямоугольном треугольнике ABC медиана, проведенная к гипотенузе равна ее половине, т.е. $CM = AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Треугольник BMC равнобедренный с основанием BC и $\angle B = \angle BCM = 79^\circ$.

CD – биссектриса прямого угла C треугольника ABC , значит, $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$.

$\angle MCD = \angle BCM - \angle BCD = 79^\circ - 45^\circ = 34^\circ$. Ответ: 34.

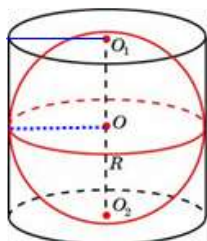
- №2. Даны векторы $\vec{a}(17;9)$ и $\vec{b}(5;-3)$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Решение:

$$\vec{a}(17;9) \cdot \vec{b}(5;-3) = 17 \cdot 5 + 9 \cdot (-3) = 85 - 27 = 58.$$

Ответ: 58.

- №3. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара.



Решение:

Так как шар вписан в цилиндр, то $h_u = 2r_u$ и $r_u = r_u$.

$$S_{n.л.ц} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2, \quad 6\pi r^2 = 18, \\ \pi r^2 = 3.$$

$$S_{n.ш} = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

№4. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трем аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение:

- 1) $120 \cdot 2 = 240$ участников олимпиады размещены в первых двух аудиториях.
- 2) $250 - 240 = 10$ оставшихся участников переводятся в запасную аудиторию.
- 3) $\frac{10}{250} = 0,04$ - вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: 0,04.

№5. Помещение освещается четырьмя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,4. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

Пусть событие A — это перегорание одной лампы. Перегорание ламп - события независимые. Найдем вероятность события «все четыре лампы перегорят в течение одного года»:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,4^4 = 0,0256.$$

Событие «хотя бы одна лампа не перегорит в течение года» противоположно событию «все четыре лампы перегорят» и его вероятность равна:

$$P(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1 - 0,0256 = 0,9744.$$

Ответ: 0,9744.

№6. Решите уравнение $\log_2(-4-x) = 7$.

Решение: $\log_2(-4-x) = 7, \quad -4-x = 2^7, \quad -4-x = 128, \quad x = -132.$

Ответ: -132.

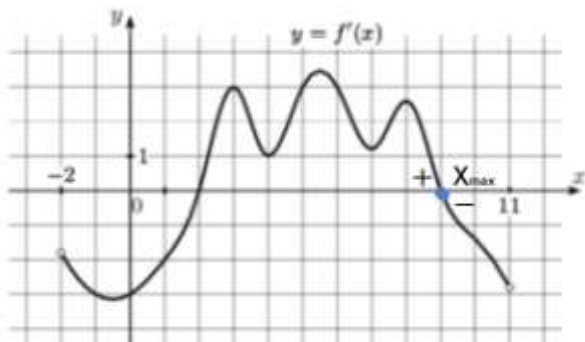
№7. Найдите значение выражения $\sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 12} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} = \sqrt{12} \left(2 \cos^2 \frac{13\pi}{12} - 1 \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{2 \cdot 13\pi}{12} = \\ &= \sqrt{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

№8. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 11)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Решение:

В точках, где производная функции равна нулю, и она меняет свой знак с плюса на минус, там функция меняет свое поведение с возрастания на убывание. В этой точке будет максимум функции. На заданном интервале $x_{\max} = 9$.

Ответ: 9.

№9. При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим

выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с),

а $u = 7$ м/с и $v = 5$ м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 155 Гц?

Решение:

$$f \geq 155, \quad f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v} \geq 155, \quad 150 \cdot \frac{c+7}{c-5} \geq 155, \quad 30 \cdot \frac{c+7}{c-5} \geq 31 \text{ и т. к. } c-5 > 0, \text{ то}$$

$$30(c+7) \geq 31(c-5), \quad c \leq 365.$$

Наибольшее значение $c = 365$.

Ответ: 365.

№10. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть $V_{\text{течения реки}} = x$ км/ч ($x > 0$), тогда

	S (путь)	V (скорость)	T (время)
По течению	112	$11+x$	$\frac{112}{11+x}$
Против течения	112	$11-x$	$\frac{112}{11-x}$

$$\frac{112}{11-x} - \frac{112}{11+x} = 6, \quad x \neq 11$$

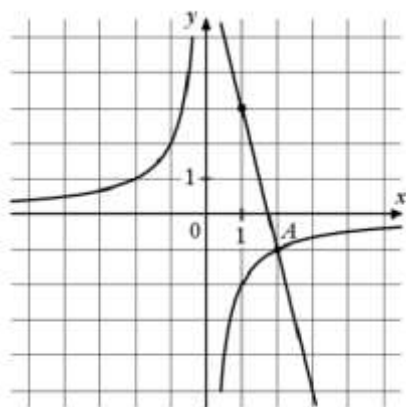
$$112 \cdot 11 + 112 \cdot x - 112 \cdot 11 + 112 \cdot x - 6(121 - x^2) = 0$$

$$6x^2 + 2 \cdot 112x - 6 \cdot 121 = 0, \quad 3x^2 + 112x - 3 \cdot 121 = 0,$$

$$D/4 = \left(\frac{112}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot 121 = 56^2 + 33^2 = 3136 + 1089 = 4225 = 65^2, \quad x = \frac{-56 + 65}{3} = 3$$

Ответ: 3.

№11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Решение:

Прямая $g(x) = ax + b$, угловой коэффициент: $a = -\frac{4}{1} = -4$.

$$(1; 3) \quad 3 = -4 \cdot 1 + b, \quad b = 7; \quad g(x) = -4x + 7.$$

Гипербола $f(x) = \frac{k}{x}$. $(2; -1) \quad -1 = \frac{k}{2}, \quad k = -2; \quad f(x) = -\frac{2}{x}$.

$$\begin{cases} g(x) = -4x + 7 \\ f(x) = -\frac{2}{x} \end{cases} \quad ; \quad -\frac{2}{x} = -4x + 7, \quad 4x^2 - 7x - 2 = 0,$$

$$x_A = 2 \quad x_B = -0,25$$

Ответ: -0,25.

№12. Найдите точку максимума функции $y = (9-x)e^{x+9}$.

Решение:

1) $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = (9-x)' \cdot e^{x+9} + (9-x) \cdot (e^{x+9})'$$

$$y' = -e^{x+9} + (9-x) \cdot e^{x+9} \cdot (x+9)'$$

$$y' = -e^{x+9} + (9-x) \cdot e^{x+9}$$

$$y' = e^{x+9} \cdot (-1+9-x)$$

$$y' = e^{x+9} \cdot (-x+8)$$

$$y' = -e^{x+9} \cdot (x-8)$$

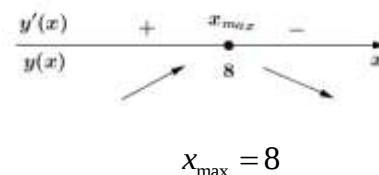
2) $y' = 0$

$$-e^{x+9} \cdot (x-8) = 0$$

$$e^{x+9} = 0 \quad x-8=0$$

$$\emptyset \quad x=8$$

3)



Ответ: 8.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Решение:

а) $\sin 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

Пусть $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$ и $t \in [-1; 1]$, тогда

$$t = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x),$$

$$\sqrt{2}t = \cos x - \sin x, \quad 2t^2 = (\cos x - \sin x)^2,$$

$$2t^2 = \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x, \quad 2t^2 = 1 - \sin 2x, \quad \sin 2x - 1 = -2t^2$$

Уравнение примет вид: $-2t^2 + t = 0$, $t(2t-1) = 0$.

1) $t=0$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ $k \in \mathbb{Z}$.

2) $t = \frac{1}{2}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \end{cases}$$

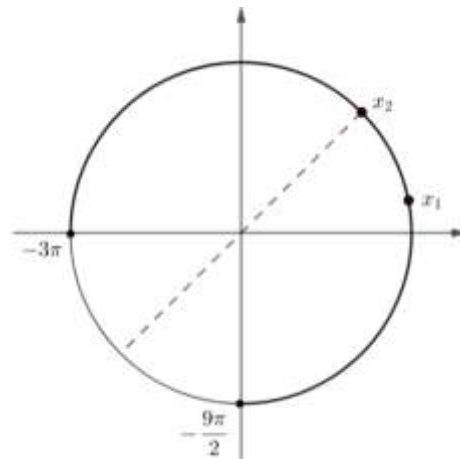
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{12} + 2\pi k$; $-\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$; б) $-\frac{47\pi}{12}$; $-\frac{15\pi}{4}$.

б) Отбор корней, принадлежащих

отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$:

$$x_1 = -4\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{47\pi}{12},$$

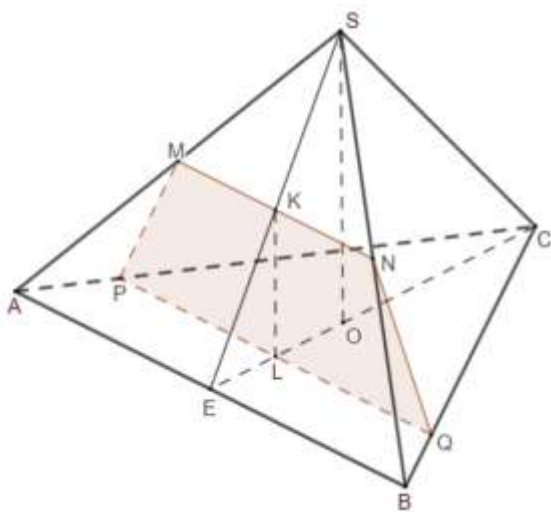
$$x_2 = -4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$$



№14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α .



Решение:

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC , поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ , параллельной MN . Рассмотрим плоскость SCE . Пусть K – точка пересечения этой плоскости и прямой MN , L – точка пересечения этой плоскости и прямой PQ , O – центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC , поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC , а значит, параллельна прямой SO . Поскольку MN – средняя линия треугольника ASB , точка K является серединой ES . Значит, L – середина EO . Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2:1.

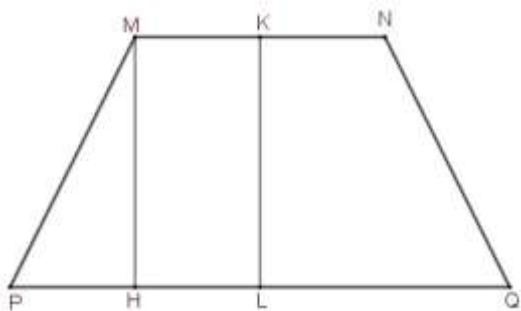
Пусть $CO = 2x$, $OE = x$ и $OL = LE = \frac{x}{2}$.

Тогда $CL = CO + OL = 2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2}$. Значит, $\frac{CL}{CE} = \frac{5x}{2} : \frac{x}{2} = 5$.

б) Поскольку $MN \parallel PQ$ и $MN \neq PQ$, то $MNQP$ – трапеция. В правильной пирамиде $SABC$ плоские углы при основании равны и так как $AP = BQ$ и $AM = BN$, то $\triangle MAP = \triangle NBQ$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $MP = NQ$ и $MNQP$ – равнобедренная трапеция.

$$MN = \frac{AB}{2} = 6 \text{ как средняя линия треугольника } ASB. \text{ В треугольнике } ABC \text{ } PQ = \frac{5AB}{6} = 10.$$

В треугольнике SOE $KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{11}{2}$ как средняя линия.



Проведем $MH \parallel KL$ и, поскольку $KL \perp PQ$, то $MH \perp PQ$.

В равнобедренной трапеции $PH = \frac{PQ - MN}{2} = \frac{10 - 6}{2} = 2$.

В прямоугольном треугольнике MHP

$$MP = \sqrt{MH^2 + PH^2} = \sqrt{KL^2 + PH^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{137}}{2}.$$

$$P_{MNQP} = MN + PQ + 2 \cdot MP = 6 + 10 + 2 \cdot \frac{\sqrt{137}}{2} = 16 + \sqrt{137}.$$

Ответ: б) $16 + \sqrt{137}$.

№15. Решите неравенство $\frac{\log_4(4^x - 128) - \log_4 2^{x+3}}{25x^2 - 180x + 324} \leq 0$.

Решение:

$$\frac{\log_4(2^{2x} - 2^7) - \log_4 2^{x+3}}{(5x-18)^2} \leq 0, \quad \begin{cases} \log_4(2^{2x} - 2^7) - \log_4 2^{x+3} \leq 0 \\ (5x-18)^2 \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \log_4(2^{2x} - 2^7) \leq \log_4 2^{x+3} \\ 5x-18 \neq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2^{2x} - 2^7 \leq 2^{x+3} \\ 2^{2x} - 2^7 > 0 \\ x \neq 3,6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2^{2x} - 8 \cdot 2^x - 128 \leq 0 \\ 2x > 7 \\ x \neq 3,6 \end{cases}, \quad \begin{cases} (2^x + 8) \cdot (2^x - 16) \leq 0 \\ x > 3,5 \\ x \neq 3,6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2^x - 2^4 \leq 0 \\ x > 3,5 \\ x \neq 3,6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3,5, \quad x \in (3,5; 3,6) \cup (3,6; 4) \\ x \neq 3,6 \end{cases}$$

Ответ: $(3,5; 3,6); (3,6; 4]$.

- №16. 15 января планируется взять кредит в банке на 4 месяца в размере S рублей (где S – целое число). Условия возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять часть суммы кредита в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
Долг (в % от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

Найдите наибольшее значение r , при котором сумма всех платежей будет превышать сумму кредита меньше чем на 30%.

Решение:

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Месяц	Долг с начисленными процентами на 1-е число	Выплаты Со 2-го по 14-е число	Долг на 15-е число
0			S
1	kS	$kS - 0,8S$	$0,8S$
2	$k \cdot 0,8S$	$k \cdot 0,8S - 0,6S$	$0,6S$
3	$k \cdot 0,6S$	$k \cdot 0,6S - 0,4S$	$0,4S$
4	$k \cdot 0,4S$	$k \cdot 0,4S - 0$	0

Сумма всех платежей:

$$(kS - 0,8S) + (k \cdot 0,8S - 0,6S) + (k \cdot 0,6S - 0,4S) + k \cdot 0,4S =$$

$$= kS(1 + 0,8 + 0,6 + 0,4) - S(0,8 + 0,6 + 0,4) = 2,8kS - 1,8S$$

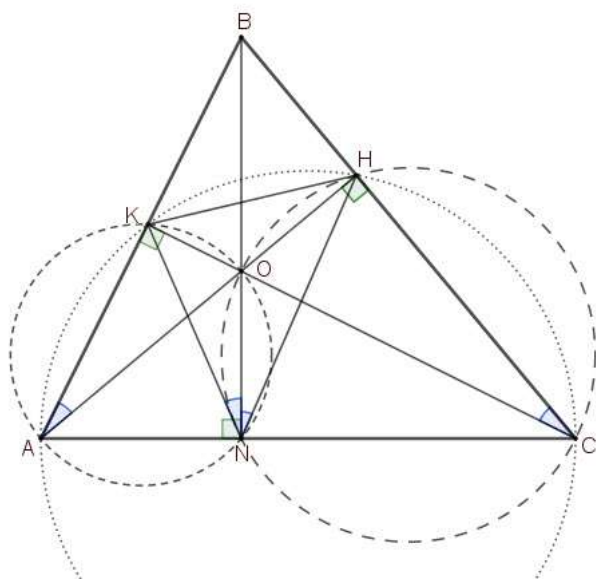
По условию сумма всех платежей превышает сумму кредита меньше чем на 30%. Тогда

$$2,8kS - 1,8S < 1,3S, \quad 2,8k < 3,1, \quad k < \frac{31}{28},$$

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{31}{28}, \quad \frac{r}{100} < \frac{31}{28} - 1, \quad \frac{r}{100} < \frac{3}{28}, \quad r < \frac{75}{7} = 10\frac{5}{7}, \quad r_{\text{наибольшее целое}} = 10.$$

Ответ: 10.

- №17. В остроугольном треугольнике ABC отрезки AH , BN и CK являются высотами. Известно, что $AK = 2$, $BH = 3$, а $\angle KNH = 60^\circ$.
- а) Доказать, что $\angle ABC = 60^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .



Решение:

а) В четырехугольнике $AKHC$

$\angle AKC = 90^\circ = \angle ANC$ и они опираются на сторону AC . Значит, четырехугольник $AKHC$ – вписанный. $\angle KAH = \angle KCH$ как вписанные, опирающиеся на дугу KH .

В четырехугольнике $AKON$ противоположные углы $\angle AKO + \angle ANO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит, $AKON$ – вписанный. $\angle KAO = \angle KNO$ как вписанные, опирающиеся на дугу KO .

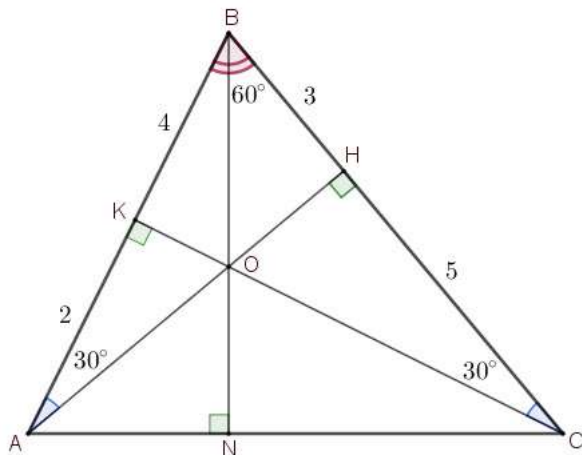
В четырехугольнике $CNOH$ противоположные углы $\angle CNO + \angle CHO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит, $CNOH$ – вписанный. $\angle OCH = \angle ONH$ как вписанные, опирающиеся на дугу OH .

Таким образом, получаем:

$$\angle KNO = \angle KAH = \angle KCH = \angle ONH.$$

Так как $\angle KNO = \angle ONH$, то NB – биссектриса $\angle KNH$. Тогда $\angle KNB = \frac{\angle KNH}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

И $\angle BAH = \angle KNB = 30^\circ$. В прямоугольном треугольнике ABH имеем $\angle ABH = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Значит, $\angle ABC = 60^\circ$.



б) Из пункта а) имеем $\angle BAH = \angle BCK = 30^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ABH

$AB = 2 \cdot BH = 2 \cdot 3 = 6$ по свойству катета, лежащего напротив угла в 30° . Тогда

$$BK = AB - AK = 6 - 2 = 4.$$

В прямоугольном треугольнике BCK аналогично, $BC = 2 \cdot BK = 2 \cdot 4 = 8$.

По теореме косинусов в треугольнике ABC имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$$

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}, \quad AC^2 = 52, \quad AC = 2\sqrt{13}$$

Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

$$\text{Тогда } \frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R, \quad \frac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R, \quad R = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

№18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x+3)|x+3|=2x-a$ имеет два различных решения.

Решение:

Преобразуем данное уравнение, раскрыв модуль.

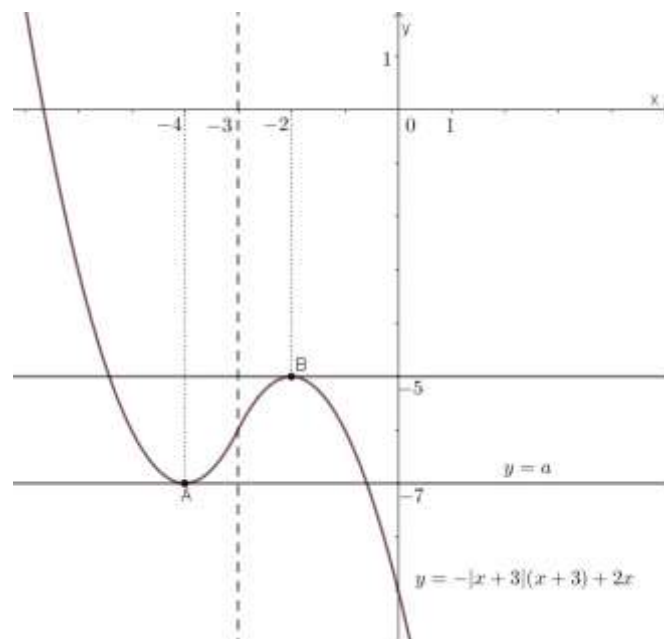
$$(x+3)|x+3|=2x-a, \quad -(x+3)|x+3|+2x=a.$$

$$1) \ x+3 \geq 0, \quad -(x+3)^2+2x=a, \quad -(x+2)^2-5=a.$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ y = -(x+2)^2 - 5 \\ y = a \end{cases}$$

$$2) \ x+3 \leq 0, \quad (x+3)^2+2x=a, \quad (x+4)^2-7=a.$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ y = (x+4)^2 - 7 \\ y = a \end{cases}$$



Количество точек пересечения прямой $y=a$ и кусочно-заданной параболы $\begin{cases} y = -(x+2)^2 - 5, & x \geq -3 \\ y = (x+4)^2 - 7, & x \leq -3 \end{cases}$

определяют количество решений исходного уравнения.

Прямая $y=a$:

- касается параболы $y=(x+4)^2-7$ в вершине $A(-4;-7)$ и пересекает параболу $y=-(x+2)^2-5$ еще в одной точке, тогда при $a=-7$ уравнение имеет два решения;
- касается параболы $y=-(x+2)^2-5$ в вершине $B(-2;-5)$ и пересекает параболу $y=(x+4)^2-7$ еще в одной точке, тогда при $a=-5$ уравнение имеет два решения;
- при $a < -7$ пересекает параболу $y=-(x+2)^2-5$ в одной точке - одно решение;
- при $-7 < a < -5$ пересекает график функции $y=-(x+3)|x+3|+2x$ в трех точках;
- при $a > -5$ пересекает параболу $y=(x+4)^2-7$ в одной точке.

Таким образом, исходное уравнение имеет два различных решения при $a \in \{-7; -5\}$.

Ответ: $a \in \{-7; -5\}$.

- №19. В ящике лежат 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.
- а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
 - б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
 - в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение:

Пусть x – количество фруктов с массой меньше 100 г, y – количество фруктов с массой больше 100 г, z – количество фруктов с массой ровно 100 г. По условию общее число фруктов равно $x + y + z = 95$. Обозначим суммарную массу в граммах всех фруктов S . По условию средняя масса всех фруктов

равна 100 г, то есть $\frac{S}{95} = 100$, $S = 9500$.

Аналогично, суммарная масса фруктов, которые весят меньше 100 г, равна $73x$; фруктов, которые весят больше 100 г – $115y$; фруктов, которые весят 100 г – $100z$, причем $z = 95 - x - y$.

Тогда имеем равенство: $73x + 100z + 115y = 9500$, $73x + 100 \cdot (95 - x - y) + 115y = 9500$, $5y = 9x$.

а) Допустим, такое возможно. Тогда $x = y$, причем $5y = 9x$. Получаем противоречие, так как x и y не могут равняться нулю.

б) Допустим, такое возможно. Тогда $0 \leq z < 10$, $0 \leq 95 - x - y < 10$. И, поскольку $5y = 9x$, $y = \frac{9x}{5}$, то $0 \leq 95 - x - \frac{9x}{5} < 10$, $0 \leq 465 - 5x - 9x < 50$, $425 < 14x \leq 475$, $30\frac{5}{14} < x \leq 33\frac{13}{14}$.

Так как x и y – натуральные числа и, учитывая, что $y = \frac{9x}{5}$, то x должно быть кратным 5. Но среди чисел 31, 32 и 33 таких нет. Получили противоречие.

в) Пусть M – наибольшая масса в граммах фрукта, очевидно, что этот фрукт находится в группе больших 100 г. Минимальный возможный вес фруктов в этой группе, при том, один фрукт весит M , равен $M + 101(y - 1)$. Чтобы пример существовал, эта нижняя граница должна быть не больше, чем заданная в условии сумма масс фруктов в этой группе – $115y$. Это необходимое условие, его выполнение не гарантирует существование примера, однако его невыполнение гарантирует, что примера нет. Тогда имеем: $M + 101(y - 1) \leq 115y$, $M \leq 14y + 101$. Максимальное допустимое M

достигается при максимальном допустимом y . Поскольку $5y = 9x$, $x = \frac{5y}{9}$ и $x + y \leq 95$, то получим:

$\frac{5y}{9} + y \leq 95$, $14y \leq 855$, $y \leq 61\frac{1}{14}$. Так как x и y – натуральные числа и, учитывая, что $x = \frac{5y}{9}$, то

y должен быть кратным 9. Наибольшее число, кратное 9, удовлетворяющее условию $y \leq 61$ – это число 54. При $y = 54$ максимально возможное $M = 14y + 101 = 857$. Пример: 30 фруктов массы 73 г, 11 фруктов массы 100 г, один фрукт массы 857 г, 53 фрукта массы 101 г. Проверим, пример подходит.

Средняя масса в граммах всех фруктов: $\frac{30 \cdot 73 + 11 \cdot 100 + 53 \cdot 101 + 1 \cdot 857}{95} = \frac{9500}{95} = 100$.

Средняя масса в граммах фруктов, масса каждого из которых больше 100 г:

$\frac{53 \cdot 101 + 1 \cdot 857}{54} = \frac{6210}{54} = 115$.

Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г: $\frac{30 \cdot 73}{30} = 73$.

Таким образом, пример удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 857 г.