Основной ЕГЭ по математике

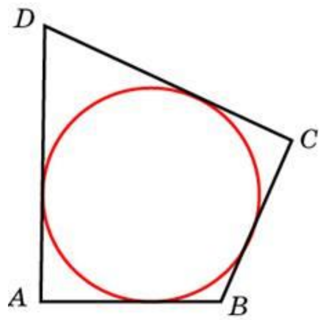
Профильный уровень

11 класс 08.06.2026

Примерный Вариант 1

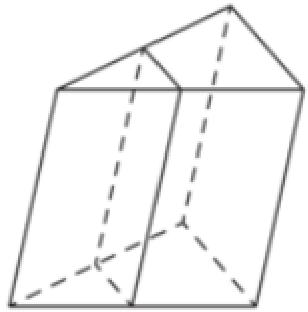
Часть 1

№1. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.



№2. Даны векторы $\vec{a}(1;2)$ и $\vec{b}(2;-1)$. Найдите длину вектора $8\vec{a}+4\vec{b}$.

№3. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 40. Найдите объем исходной призмы.



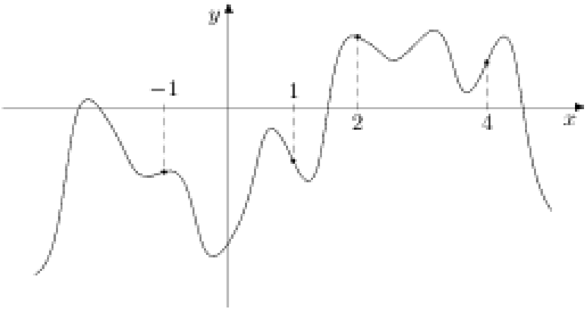
№4. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

№5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

№6. Решите уравнение $\log_2(4-x)=8$.

№7. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sin 114^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \cos 33^\circ}$.

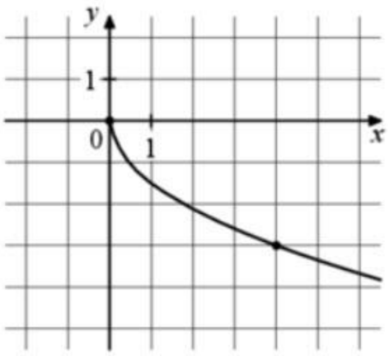
№8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



№9. Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 3$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ – постоянная, $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа в 16470 Дж?

№10. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

№11. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2{,}56)$.



№12. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}\cos(\pi + x) = 1$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

№14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка M – середина ребра AB. Через точку M проведена плоскость α, параллельная плоскости SBC и пересекающая ребро SD в точке K.

а) Докажите, что K – середина ребра SD.

б) Найдите объем пирамиды $SABCD$, если $AB=24$, угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 30°.

№15. Решите неравенство $\dfrac{x^2+2x-3}{\log_3\left(8\cdot 2^x\right)}\le 0$.

№16. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 16 625 тыс. рублей. Найдите S.

№17. Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC, а также его высоты CH.

а) Доказать, что угол $\angle AOC=90^\circ$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BO=7,\ AC=10$.

№18. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^4+x^3+\left(a^3-2a\right)x^2+\left(a^2-2\right)x=ax^3+x^2+\left(a^3-2a\right)x+a^2-2$ имеет ровно 2 решения.

№19. На столе лежит N монет по 2 рубля, и $800-N$ по 5 рублей. N может принимать значения от 1 до 799. Известно, что если взять любые 300 монет, то их сумма будет составлять не меньше четверти от общей суммы.

а) Может ли N равняться 200?

б) Может ли N равняться 400?

в) Сколько всего различных значений может принимать N?

▪ *Ответы*

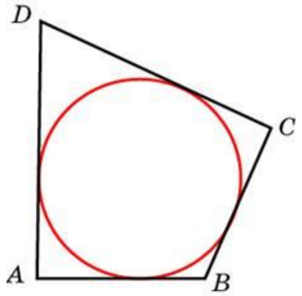
№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
52	*20*	*160*	*0,2*	*0,0476*	*-252*	*24*	*1*	*4,8*	*10*	*-2,4*	*4*

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$	$768\sqrt{30}$	$(-\infty;-3);(-3;1]$	*14 000*	*60*	$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$; $\{-1;1\}$; $\left(\sqrt{2};\infty\right)$	*а) да; б) нет; в) 488.*

- ***Решение***

Часть 1

№1. **В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.**



Решение:

$$AB+DC=10+16=26$$

$$AB+DC=AD+BC$$

$$P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=2(AB+DC)=2\cdot 26=52$$

Ответ: 52.

№2. **Даны векторы $\vec{a}(1;2)$ и $\vec{b}(2;-1)$. Найдите длину вектора $8\vec{a}+4\vec{b}$.**

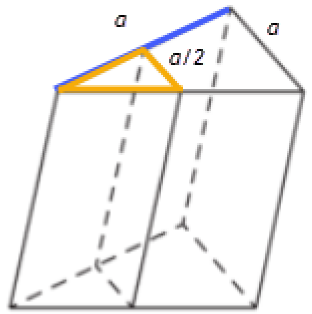
Решение:

$$8\cdot\vec{a}(1;2)+4\cdot\vec{b}(2;-1)=(8;16)+(8;-4)=(8+8;16-4)=(16;12)$$

$$\left|8\vec{a}+4\vec{b}\right|=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{4^2\cdot 4^2+4^2\cdot 3^2}=4\sqrt{4^2+3^2}=4\cdot 5=20$$

Ответ: 20.

№3. **Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 40. Найдите объем исходной призмы.**



Решение:

Высота отсеченной призмы осталась неизменной, а в основании получился треугольник, подобный треугольнику, лежащему в основании исходной призмы с коэффициентом подобия 2. Поэтому

$$\frac{S_{осн.исх.призмы}}{S_{осн.отс.призмы}}=k^2=2^2=4.$$

$$\frac{V_{исх}}{V_{отс}}=\frac{S_{исх.осн.}\cdot h}{S_{отс.осн.}\cdot h};\quad \frac{V_{исх}}{40}=4;\quad V_{исх}=160.$$

Ответ: 160.

№4. **В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.**

Решение:

Пусть событие A "школьнику достанется вопрос в билете по ботанике". $N(A)=11$ - число благоприятных для этого события исходов, $N=55$ - общее число равновозможных исходов. Тогда вероятность события A равна $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{11}{55}=\frac{1}{5}=0,2$.

Ответ: 0,2.

№5. **Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.**

Решение:
Вероятность события "произведена неисправная батарейка" равна $0,04$, тогда вероятность противоположного события "произведена исправная батарейка" равна $1-0,04=0,96$. Вероятность события "система забракует исправную батарейку" равна $0,01$.
События "произведена исправная батарейка" и "исправная батарейка забракована" независимы, поэтому вероятность события A - "произведена и забракована исправная батарейка" равна
$P(A)=0,01\cdot 0,96=0,0096$.
Аналогично находим вероятность события B - "произведена и забракована неисправная батарейка":
$P(B)=0,04\cdot 0,95=0,038$. События A и B несовместны. Искомая вероятность равна
$P(A)+P(B)=0,0096+0,038=0,0476$.
Или другая запись решения с помощью дерева вероятностей.

Ответ: 0,0476.

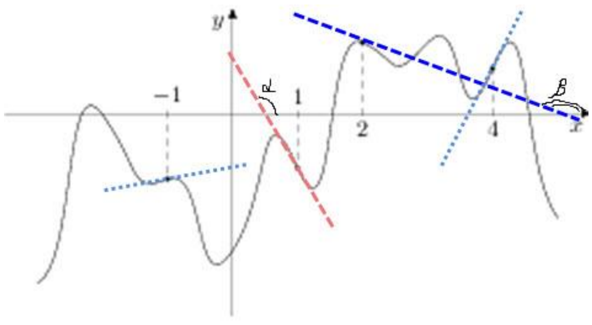
№6. **Решите уравнение** $\log_2(4-x)=8$.

Решение: $\log_2(4-x)=8,\quad 4-x=2^8,\quad 4-256=x,\quad x=-252$. *Ответ: -252.*

№7. **Найдите значение выражения** $\dfrac{12\sin 114^\circ}{\cos 57^\circ\cdot\cos 33^\circ}$.

Решение: $\dfrac{12\sin 114^\circ}{\cos 57^\circ\cdot\cos 33^\circ}=\dfrac{12\sin 2\cdot 57^\circ}{\cos 57^\circ\cdot\sin 57^\circ}=\dfrac{12\cdot 2\cdot\sin 57^\circ\cdot\cos 57^\circ}{\cos 57^\circ\cdot\sin 57^\circ}=24$. *Ответ: 24.*

№8. **На рисунке изображен график функции** $y=f(x)$ **и отмечены точки -1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.**



Решение:
Проведем касательные к графику функции в заданных точках. Исходя из геометрического смысла производной: $f'(x_0)=tg\alpha=k$, имеем, что наименьшее значение производной функции будет в той точке, где угловой коэффициент касательной наименьший. Углы α и β - тупые, поэтому $tg\alpha<0,\ \mathrm{tg}\beta<0$ и т. к. $\alpha<\beta$, то $tg\alpha<tg\beta$. Поэтому $f'(1)<f'(2)$. В точке 1 значение производной наименьшее. *Ответ: 1.*

№9. **Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 3$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (атм.) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа в 16470 Дж?**

Решение:

$$A = 16470, \quad \alpha\upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1} = 16470, \quad 9{,}15 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} = 16470$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1{,}2} = \frac{16470}{915 \cdot 3 \cdot 3} \Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} = 2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1{,}2} = 4 \Leftrightarrow p_2 = 4{,}8$$

Ответ: 4,8.

№10. **Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.**

Решение:

	S	V	T
АВ (туда)	70	x	$\frac{70}{x}$
ВА (обратно)	70	$x+3$	$\frac{70}{x+3}$

$$\frac{70}{x+3} + 3 = \frac{70}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$70x + 3x^2 + 9x - 70x - 210 = 0$$

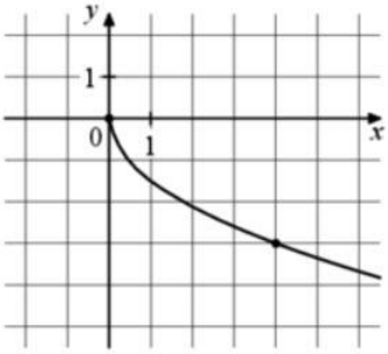
$$3x^2 + 9x - 210 = 0, \quad x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$D = 9 + 280 = 289, \quad x = \frac{-3 \pm 17}{2}, \quad x > 0, \quad x = 7$$

$$V_{BA} = 7 + 3 = 10.$$

Ответ: 10.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2{,}56)$.**



Решение:

$(4;-3)$, $-3 = k\sqrt{4}$, $2k = -3$, $k = -1{,}5$ $\quad f(x) = -1{,}5\sqrt{x}$.

$$f(2{,}56) = -1{,}5\sqrt{2{,}56} = -1{,}5 \cdot 1{,}6 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} = -2{,}4$$

Ответ: -2,4.

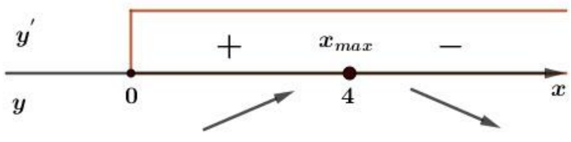
№12. **Найдите точку максимума функции** $y=7+6x-2x^{\frac{3}{2}}$.

Решение:

$y=7+6x-2x^{\frac{3}{2}};\ D(y)=[0;\infty)$

$y'=6-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=6-3x^{\frac{1}{2}}=6-3\sqrt{x}=3(2-\sqrt{x})$

$y'=0,\ \ 2-\sqrt{x}=0,\ \ \sqrt{x}=2,\ \ x=4$



$x_{\max}=4$

Ответ: 4.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+x)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+x)=0$

$$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=0$$

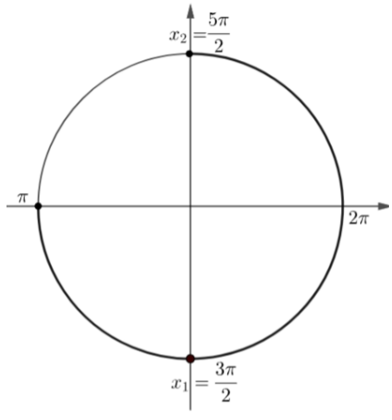
$$\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$$

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ *; б)* $\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$.

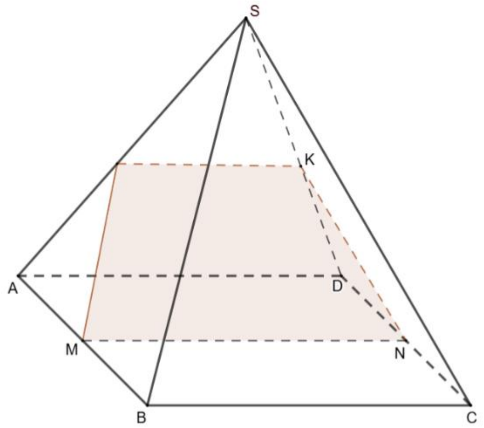
б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$:



№14. **В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка M – середина ребра AB. Через точку M проведена плоскость α, параллельная плоскости SBC и пересекающая ребро SD в точке K.**

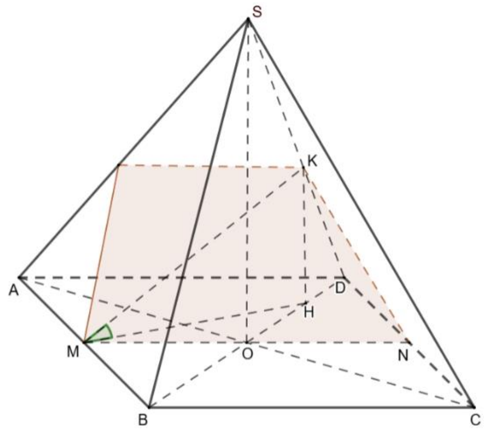
а) Докажите, что K – середина ребра SD.

б) Найдите объем пирамиды $SABCD$, если $AB = 24$, угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 30°.



Решение:

а) В правильной четырехугольной пирамиде в основании лежит квадрат $ABCD$. Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке N. Плоскость ABC пересекает параллельные плоскости α и BSC по параллельным прямым MN и BC. Тогда, поскольку M – середина AB, то N – середина CD. Плоскость CSD пересекает α и BSC по параллельным прямым KN и SC. Значит, KN – средняя линия треугольника CSD и K – середина ребра SD.



б) Пусть O – центр основания пирамиды - точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, тогда SO – высота пирамиды. В прямоугольном треугольнике SOD проведем $KH \parallel SO$, тогда $KH \perp ABC$.

MH – проекция наклонной MK на плоскость ABC и угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен $\angle KMH = 30^\circ$.

K – середина ребра SD и $KH \parallel SO$, тогда KH – средняя линия $\triangle SOD$ и H – середина OD.

$$OH = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{AB\sqrt{2}}{4} = \frac{24\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2},\quad MO = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

В треугольнике MOH

$$\angle MOH = \angle MOA + \angle AOD = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ.$$

$$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2 - 2 \cdot MO \cdot OH \cdot \cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{12^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 6\sqrt{10}$$

В треугольнике MHK $tg 30^\circ = \frac{KH}{MH}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{KH}{6\sqrt{10}}$, $KH = 2\sqrt{30}$.

Следовательно, $SO = 2KH = 2 \cdot 2\sqrt{30} = 4\sqrt{30}$.

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 4\sqrt{30} = 768\sqrt{30}.$$

Ответ: б) $768\sqrt{30}$.

№15. **Решите неравенство** $\dfrac{x^2+2x-3}{\log_3\left(8\cdot 2^x\right)}\le 0$.

Решение:

$$\frac{x^2+2x-3}{\log_3\left(8\cdot 2^x\right)}\le 0,\quad \frac{(x-1)(x+3)}{\log_3\left(2^3\cdot 2^x\right)-\log_3 1}\le 0,\quad \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+3)}{2^{x+3}-1}\le 0\\ 8\cdot 2^x>0\end{cases},\quad \frac{(x-1)(x+3)}{2^{x+3}-2^0}\le 0,$$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{x+3}\le 0,\quad \begin{cases}x-1\le 0\\ x\ne -3\end{cases},\quad \begin{cases}x\le 1\\ x\ne -3\end{cases},\quad x\in(-\infty;-3)\cup(-3;1]$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;1]$.

№16. **В июле 2028 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:**

- **каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;**
- **с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;**
- **в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года;**
- **в июле 2032 года долг должен быть полностью погашен.**

Известно, что общая сумма выплат по кредиту составила 16 625 тыс. рублей. Найдите S

Решение:
По условию в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 50% меньше долга на июль предыдущего года. Тогда каждый раз после выплаты долг составляет 50% от долга предыдущего года.

Год	*Долг с начисленными процентами на январь*	*Выплаты с февраля по июнь*	*Долг в июле*
2028			S
2029	$1{,}1S$	$1{,}1S-0{,}5S=0{,}6S$	$0{,}5S$
2030	$1{,}1\cdot 0{,}5S$	$1{,}1\cdot 0{,}5S-0{,}25S=0{,}3S$	$0{,}25S$
2031	$1{,}1\cdot 0{,}25S$	$1{,}1\cdot 0{,}25S-0{,}125S=0{,}15S$	$0{,}125S$
2032	$1{,}1\cdot 0{,}125S$	$1{,}1\cdot 0{,}125S=0{,}1375S$	0

По условию сумма всех выплат равна 16 625 тыс. рублей, тогда получим уравнение:

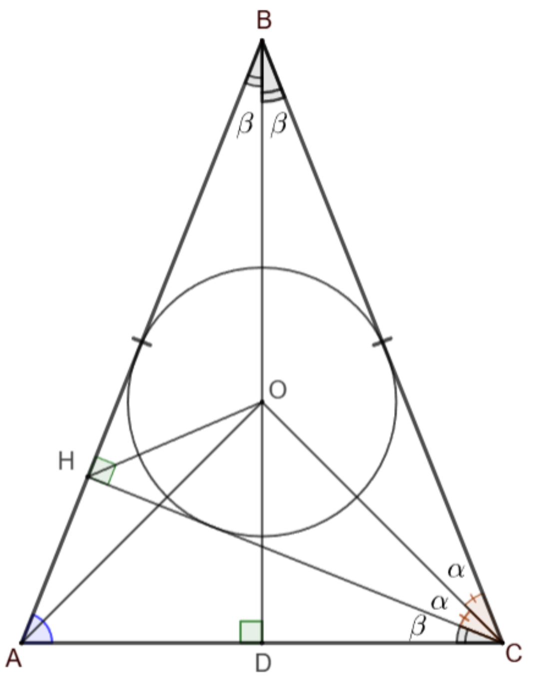
$$0{,}6S+0{,}3S+0{,}15S+0{,}1375S=16\ 625\qquad 1{,}1875S=16\ 625\qquad S=14\ 000.$$

Ответ: 14 000.

№17. **Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC, а также его высоты CH.**

а) Доказать, что угол $\angle AOC = 90^\circ$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BO = 7,\ AC = 10$.



Решение:

а) В равнобедренном треугольнике ABC проведем высоту BD к основанию AC, значит, BD является также и биссектрисой угла ABC.

Прямоугольные треугольники AHC и ADB подобны по равному углу A, тогда $\angle ABD = \angle ACH = \beta$.

Окружность с центром O вписана в треугольник BHC, следовательно, она является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника и O лежит на BD. $CO -$ биссектриса угла HCB и $\angle HCO = \angle OCB = \alpha$.

В прямоугольном треугольнике BHC

$\angle HBC + \angle HCB = 90^\circ,\ \ 2\beta + 2\alpha = 90^\circ,\ \ \alpha + \beta = 45^\circ$.

В равнобедренном треугольнике ABC BD является также и медианой, проведенной к стороне AB, значит, $\triangle ADO = \triangle CDO$ по двум катетам. Тогда $AO = OC$ и $\triangle AOC -$ равнобедренный, следовательно, $\angle OAC = \angle OCA = \alpha + \beta = 45^\circ$ и $\angle AOC = 90^\circ$.

б) В равнобедренном прямоугольном треугольнике AOC $OD -$ медиана и высота, проведенная к гипотенузе AC, следовательно, $OD = AD = DC = \dfrac{AC}{2} = 5$. $BD = BO + OD = 7 + 5 = 12$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60$.

Ответ: б) 60.

№18. **Найдите все значения параметра a, при которых уравнение**

$ax^4 + x^3 + \left(a^3 - 2a\right)x^2 + \left(a^2 - 2\right)x = ax^3 + x^2 + \left(a^3 - 2a\right)x + a^2 - 2$ **имеет ровно 2 решения.**

Решение:

Преобразуем выражения в уравнении.

$$\underline{ax^4} + \underline{x^3} + a\left(a^2 - 2\right)x^2 + \left(a^2 - 2\right)x - \underline{ax^3} - \underline{x^2} - a\left(a^2 - 2\right)x - \left(a^2 - 2\right) = 0$$

$$x^2\left(x^2 a + x - ax - 1\right) + \left(a^2 - 2\right)\left(x^2 a + x - ax - 1\right) = 0$$

$$\left(x^2 a + x - ax - 1\right)\left(x^2 + a^2 - 2\right) = 0$$

$$x^2 a + x - ax - 1 = 0 \qquad x^2 + a^2 - 2 = 0$$

$$x\left(ax + 1\right) - \left(ax + 1\right) = 0 \qquad x^2 + a^2 = 2$$

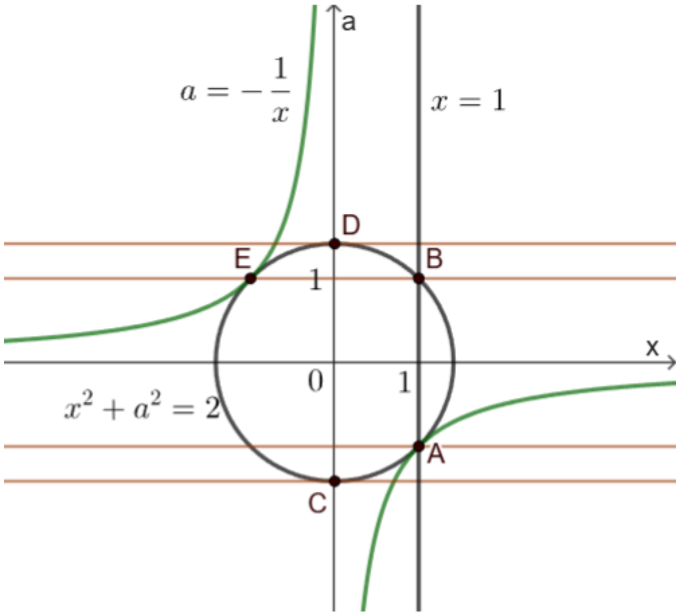
$$\left(ax + 1\right)\left(x - 1\right) = 0$$

$$ax + 1 = 0 \qquad x - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{x} \qquad x = 1$$

Проверкой установим, что $x=0$ корнем не является, тогда исходное уравнение равносильно совокупности трех уравнений $\left[\begin{array}{ll} x^2+a^2=2 & (1) \\ a=-\dfrac{1}{x} & (2) \\ x=1 & (3) \end{array}\right.$. В системе координат xOa уравнение (1) задает окружность с центром в начале координат и радиусом равным $\sqrt{2}$. Графиком уравнения (2) является гипербола, расположенная во II и IV четвертях. Уравнение (3) задает прямую параллельную оси Oa.

Найдем координаты точек пересечения графиков.



$\begin{cases} x^2+a^2=2 \\ x=1 \end{cases}$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$.

$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{x} \\ x^2+a^2=2 \end{cases}$, $x^2+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2=2$, $x^4-2x^2+1=0$,

$\left(x^2-1\right)^2=0$, $x^2=1$, $x=\pm1$ $\quad A(1;-1)$, $\quad E(-1;1)$

Окружность пересекает ось Oa в точках $C\left(0;-\sqrt{2}\right)$ и $D\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Найдем граничные значения параметра a. Определим количество точек пересечения прямой $a=const$ и графиков уравнений совокупности:

- $C\left(0;-\sqrt{2}\right)$ при $a=-\sqrt{2}$ касается окружности, пересекает ветвь гиперболы и прямую $x=1$ в трех различных точках;
- $A(1;-1)$ при $a=-1$ пересекает окружность, ветвь гиперболы и прямую $x=1$ и еще раз пересекает окружность - две точки;
- $B(1;1)$ и $E(-1;1)$ при $a=1$ пересекает окружность в этих точках, прямую $x=1$ в точке B и ветвь гиперболы в точке E - две общие точки;
- $D\left(0;\sqrt{2}\right)$ при $a=\sqrt{2}$ касается окружности, пересекает ветвь гиперболы и прямую $x=1$ в трех различных точках.

Таким образом, количество точек пересечения прямой $a=const$ и графиков уравнений совокупности определяет количество решений исходного уравнения: $a<-\sqrt{2}$ - два, $a=-\sqrt{2}$ - три, $-\sqrt{2}<a<-1$ - четыре, $a=-1$ - два, $-1<a<0$ - четыре, $a=0$ - три, $0<a<1$ - четыре, $a=1$ - два, $1<a<\sqrt{2}$ - четыре, $a=\sqrt{2}$ - три и $a>\sqrt{2}$ - два.

Следовательно, уравнение имеет два решения при $a<-\sqrt{2}$, $a=-1$, $a=1$ и $a>\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\{-1;1\}\cup\left(\sqrt{2};\infty\right)$.

№19. **На столе лежит N монет по 2 рубля, и $800-N$ по 5 рублей. N может принимать значения от 1 до 799. Известно, что если взять любые 300 монет, то их сумма будет составлять не меньше четверти от общей суммы.**

а) Может ли N равняться 200?

б) Может ли N равняться 400?

в) Сколько всего различных значений может принимать N ?

Решение:

Всего монет N по 2 рубля и $800-N$ по 5 рублей, тогда общая сумма

$S=2\cdot N+5\cdot(800-N)=4000-3N$. Условие: для любых 300 монет их сумма $\geq\frac{1}{4}S$.

1. Найдем минимальную сумму 300 монет.

Чтобы сумма была минимальной, нужно взять как можно больше монет по 2 рубля. Максимальное число двухрублевых монет, которое можно взять - это $\min(N,300)$. Тогда минимальная сумма 300 монет: $M=2\cdot\min(N,300)+5\cdot(300-\min(N,300))=1500-3\min(N,300)$.

Условие задачи: $1500-3\min(N,300)\geq\frac{4000-3N}{4}$.

2. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $N\leq 300$, тогда $\min(N,300)=N$.

Неравенство $1500-3N\geq\frac{4000-3N}{4}$, $N\leq\frac{2000}{9}\approx 222,22\ldots$. Значит, при $N\leq 300$ подходят только значения $N\leq 222$.

Случай 2. $N>300$, тогда $\min(N,300)=300$.

Неравенство $1500-3\cdot 300=600\geq\frac{4000-3N}{4}$, $N\geq\frac{1600}{3}\approx 533,33\ldots$. Значит, при $N>300$ подходят только $N\geq 534$.

а) $N=200-$подходит, так как $200\leq 222$. Да, может.

б) $N=400-$не подходит, так как $300<400<534$. Нет, не может.

в) Подходят значения N :

- от 1 до 222 включительно - всего 222 значения;
- от 534 до 799 включительно - всего $799-534+1=266$ значений.

Итого: $222+266=488$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 488.