

5. Разные задачи

Задачи на проценты

■ Примеры

- №1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 55% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 75% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.
-
- №2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
-
- №3. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.
-
- №4. В городе 46% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".
-
- №5. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?
-
- №6*. Три технологические линии выполняют разлив и упаковку в бутылки газированной воды «Минеральная». Первая линия дает 4% брака, и ее загружают на 20% объема производства газированной воды. Вторая линия дает 2% брака, и ее загружают на 30% объема производства газированной воды. Третья линия, самая современная, дает 1% брака, и ее загружают на 50% объема производства газированной воды. Какова вероятность того, что случайно взятая в выпущенной партии бутылка воды «Минеральная» окажется бракованной?
-
- №7*. На двух линиях выпускают одинаковые лампы. Первая линия выпускает в три раза больше ламп, чем вторая, но вероятность брака на первой линии равна 0,1, а на второй 0,06. Все лампы поступают на склад. Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа на складе окажется не бракованной.

Примечание: Задания, отмеченные (*), встречались на ЕГКР (Единой городской контрольной работе) в Москве, диагностиках ВПР и МЦКО или в тренировочных вариантах ЕГЭ.

Вычисление вероятностей с помощью комбинаторной формулы

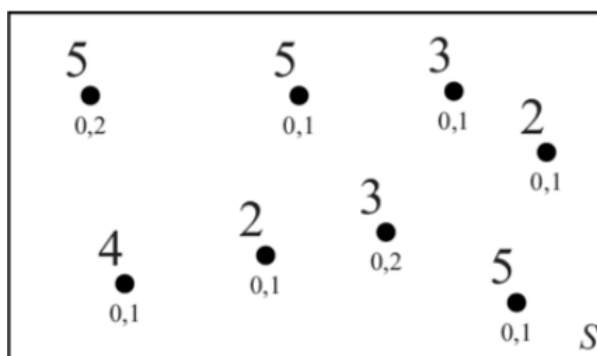
№8*. Из 10 билетов 2 являются выигрышным. Наугад берут 4 билета. Найдите вероятность того, что среди них окажется ровно один выигрышный. Ответ округлите до сотых.

№9. Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 9 выстрелов. Какова вероятность, что среди первых пяти выстрелов хотя бы один промах?

№10. Чтобы забросить шесть мячей в корзину на тренировке, баскетболисту потребовалось 10 бросков. Считая, что вероятность попадания в корзину при каждом броске одна и та же, найдите вероятность того, что при первых четырех бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Результат округлите до тысячных.

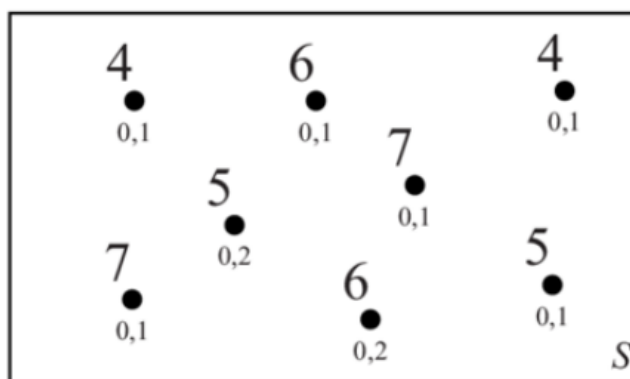
Случайные величины и математическое ожидание случайной величины

№11. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



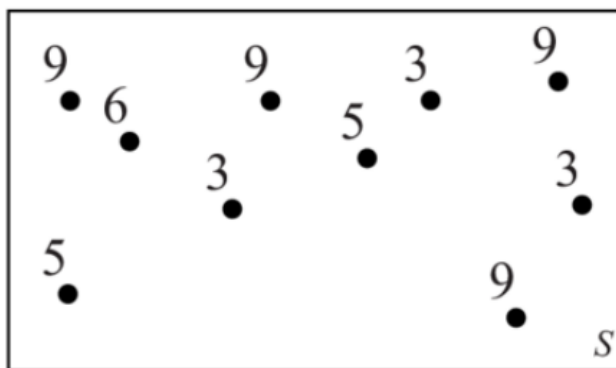
Найдите вероятность события $(X = 5)$.

№12. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



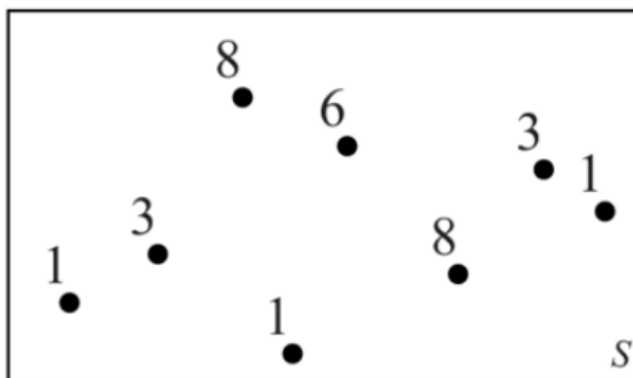
Найдите вероятность события $(5 \leq X < 7)$.

- №13. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X = 9)$.

- №14. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X \leq 4,7)$.

- №15. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

- №16. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

- №17. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции принцесс. Всего в коллекции 8 различных принцесс, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди принцесс есть Золушка. Первоклассница покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся две Золушки? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

№18. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ », которую дает неравенство Чебышёва.

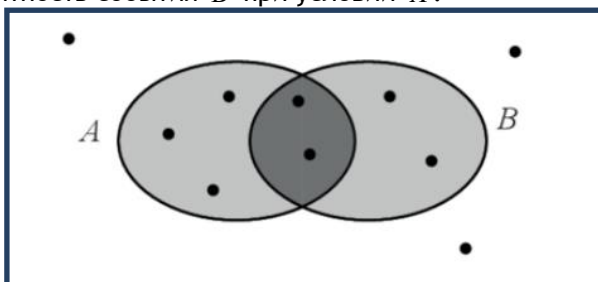
№19. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите нижнюю оценку вероятности события « $0 < X < 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

№20. Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,4 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,8 мм».

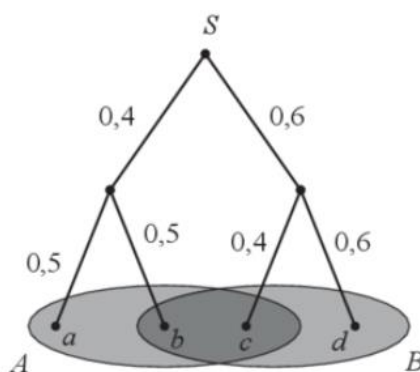
№21. Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от среднего более чем на 0,75 мм».

Условная вероятность

№22. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



№23. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



Рекурсии

№24. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

Викторины и турниры

№25. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

№26. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

№27. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

Статистика

№28. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 1,4 1,2 1,3 1,4 и 1,2.
По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

№29. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 520, 420, 440, 500, 520, 560, 520, 520, 560, 580 и 580 рублей.
По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.

№30. При выборочном обследовании жителей города А. 12 из 24 респондентов ответили «Нет» на вопрос, понравился ли им новый торговый центр. Найдите интервальную оценку доли горожан, которым торговый центр не понравился, пользуясь правилом «частота плюс-минус одно стандартное отклонение». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

№31. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 12 из 36 случайных респондентов ответили «Нет» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, не имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус два стандартных отклонения». В ответе запишите длину доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Задачи на проценты

- №1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 55% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 75% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

	Всего яиц	Высшей категории
I хозяйство	x	$0,95x$
II хозяйство	y	$0,55y$
I+II агрофирма	$x + y$	$0,75(x + y) = 0,95x + 0,55y$

$$x = y, \quad P = \frac{x}{x + y} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Вероятность того, что купленное яйцо в этой агрофирме окажется из первого хозяйства, равна 0,5.

Ответ: 0,5.

- №2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Пусть всего произведено x стёкл для фар. Первая фабрика выпускает $0,45x$ этих стекол, а вторая - $0,55x$. Бракованные стекла на первой фабрике $0,03 \cdot 0,45x = 0,0135x$, на второй фабрике - $0,01 \cdot 0,55x = 0,0055x$. Всего бракованных стёкл с двух фабрик $0,0134x + 0,0055x = 0,019x$.

Вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным, равна $\frac{0,019x}{x} = 0,019$.

Ответ: 0,019.

- №3. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Пусть всего производится на фабрике x тарелок. Из них имеют дефект 10% или $0,1x$, тогда в продажу поступают 90% тарелок без дефекта или $0,9x$. При контроле качества продукции выявляется только 80% дефектных тарелок, значит, 20% дефектных тарелок уйдет в продажу, а именно, $0,2 \cdot 0,1x = 0,02x$. Таким образом, в продажу поступает $0,9x$ тарелок без дефекта и $0,02x$ с дефектом. Всего поступило в продажу

$0,92x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефекта $\frac{0,9x}{0,92x} = \frac{45}{46} \approx 0,978... \approx 0,98$. Ответ: 0,98.

- №4. В городе 46% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 7,7% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".

Пусть в городе всего x жителей, тогда мужчин - $0,46x$, а женщин - $0,54x$. Пенсионеров $0,077x$, а женщин среди пенсионеров - $0,1 \cdot 0,54x = 0,054x$. Пенсионеров среди мужчин $0,077x - 0,054x = 0,023x$. Тогда

вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером" равна $\frac{0,023x}{0,46x} = 0,05$. Ответ: 0,05.

- №5. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Пусть x — число больных пациентов и y — число здоровых. Тогда имеется всего $(x + y)$ пациентов. Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0,1(x + y)$, из которых $0,86x$ тестов подтверждается у больных и $0,06y$ положительных тестов у здоровых пациентов. Тогда

$$0,1(x + y) = 0,86x + 0,06y; \quad 0,1y - 0,06y = 0,86x - 0,1x; \quad y = 19x$$

Вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна

$$\frac{0,86x}{0,1(x + y)} = \frac{0,86x}{0,1(x + 19x)} = \frac{0,86x}{2x} = 0,43. \quad \text{Ответ: } 0,43.$$

- №6*. Три технологические линии выполняют разлив и упаковку в бутылки газированной воды «Минеральная». Первая линия дает 4% брака, и ее загружают на 20% объема производства газированной воды. Вторая линия дает 2% брака, и ее загружают на 30% объема производства газированной воды. Третья линия, самая современная, дает 1% брака, и ее загружают на 50% объема производства газированной воды. Какова вероятность того, что случайно взятая в выпущенной партии бутылка воды «Минеральная» окажется бракованной?

Пусть x бутылок воды - это выпущенная партия.

Линия	Загрузка	Брак в %	Брак (в количестве бутылок)
I	$0,2x$	$4\% = 0,04$	$0,04 \cdot 0,2x = 0,008x$
II	$0,3x$	$2\% = 0,02$	$0,02 \cdot 0,3x = 0,006x$
III	$0,5x$	$1\% = 0,01$	$0,01 \cdot 0,5x = 0,005x$

Всего бракованных бутылок в партии $0,008x + 0,006x + 0,005x = 0,019x$.

Вероятность взять бракованную бутылку равна $P = \frac{0,019x}{x} = 0,019$. Ответ: 0,019.

- №7*. На двух линиях выпускают одинаковые лампы. Первая линия выпускает в три раза больше ламп, чем вторая, но вероятность брака на первой линии равна 0,1, а на второй 0,06. Все лампы поступают на склад. Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа на складе окажется не бракованной.

Пусть на второй линии выпускают x ламп, тогда на первой линии выпускают $3x$ ламп. Значит, всего на склад поступают $3x + x = 4x$ ламп. Количество бракованных ламп на первой линии $0,1 \cdot 3x = 0,3x$, а на второй линии - $0,06x$. Всего бракованных ламп $0,3x + 0,06x = 0,36x$. Вероятность выбрать бракованную лампу равна $\frac{0,36x}{4x} = 0,09$. Тогда вероятность противоположного события «выбрать не бракованную лампу» равна $1 - 0,09 = 0,91$. Ответ: 0,91.

Вычисление вероятностей с помощью комбинаторной формулы

№8*. Из 10 билетов 2 являются выигрышным. Наугад берут 4 билета. Найдите вероятность того, что среди них окажется ровно один выигрышный. Ответ округлите до сотых.

1) Всего способов выбрать 4 билета из 10: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

2) $C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$ – число способов выбрать 1 выигрышный билет из 2-х имеющихся.

3) $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$ – число способов выбрать 3 проигрышных билета из 8.

4) Благоприятное число способов выбрать один выигрышный и три проигрышных билета $2 \cdot 56 = 112$.

Вероятность такого события $\frac{112}{210} = \frac{56}{105} \approx 0,533... \approx 0,53$. Ответ: 0,53.

№9. Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 9 выстрелов. Какова вероятность, что среди первых пяти выстрелов хотя бы один промах?

На 9 выстрелов приходится 8 попаданий и 1 промах. Поскольку стрелку потребовалось 9 выстрелов, чтобы поразить все 8 мишеней, то 9-й выстрел - это попадание. Определим сколько всего вариантов того, как могут сочетаться 1 промах (-) и 7 попаданий (+) в мишень при 8 выстрелах, например, (+++-----, -----+, и т. д.).

$$N = C_{8 \text{ выстрелов}}^{1 \text{ промах}} = \frac{8!}{(8-1)!} = \frac{7! \cdot 8}{7!} = 8.$$

По условию, среди первых пяти выстрелов был хотя бы 1 промах. Определим количество таких благоприятных событий.

Первыми пятью выстрелами поразил 4 мишени и 1 промах, на следующие три выстрела 3 попадания.

Например, $\underbrace{++++-}_{\text{Поразил 4 мишени первыми пятью выстрелами: } C_5^1 \text{ промах}} \underbrace{+++}_{\text{3 попадания на 3 выстрела: } C_3^3}$. Всего таких комбинаций $C_5^1 \cdot C_3^3 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot 1 = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$.

Тогда количество событий, благоприятных событию А "среди первых пяти выстрелов хотя бы один промах" равно $N(A) = 5$.

И вероятность такого события равна $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{8} = 0,625$. Ответ: 0,625.

№10. Чтобы забросить шесть мячей в корзину на тренировке, баскетболисту потребовалось 10 бросков. Считая, что вероятность попадания в корзину при каждом броске одна и та же, найдите вероятность того, что при первых четырех бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Результат округлите до тысячных.

На 10 бросков приходится 6 попаданий и 4 промаха. Учитывая, что 10-й бросок - это попадание, то определим сколько всего вариантов того, как могут сочетаться 4 промаха (-) и 5 попаданий (+) при 9 бросках, например (-----+, -----+, и т. д.)

$$N = C_{9 \text{ бросков}}^{4 \text{ промаха}} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

По условию, при первых четырех бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Определим количество таких благоприятных событий.

1) Среди первых четырех выстрелов не было ни одного попадания, на следующие пять бросков - 5 попаданий. Такая комбинация возможна только одна: $\underbrace{----}_{\text{4 промаха}} \underbrace{+++++}_{\text{5 попаданий}}$.

2) При первых четырех бросках 1 попадание и 3 промаха, при следующих пяти бросках 1 промах и 4

попадания. Например, $\underbrace{- \ - \ + \ -}_{\text{Первые 4 броска - 3 промаха и 1 попадание: } C_4^3} \underbrace{+ \ + \ + \ - \ +}_{\text{Следующие 5 бросков - 1 промах и 4 попадания: } C_5^1}$.

Всего таких вариантов $C_4^3 \cdot C_5^1 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot \frac{5!}{(5-1)!} = 4 \cdot 5 = 20$.

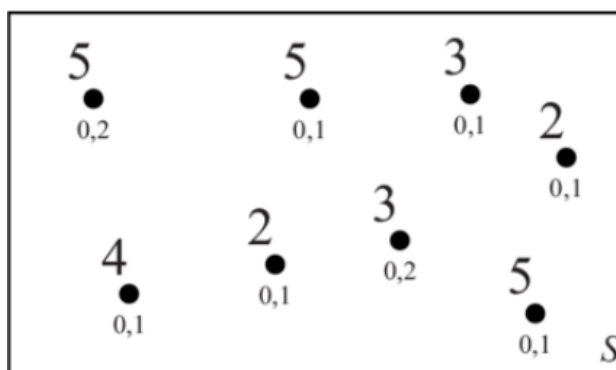
Тогда количество событий, благоприятных событию А "при первых четырех бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза" равно $N(A) = 1 + 20 = 21$.

И вероятность такого события равна $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{21}{126} \approx 0,167$.

Ответ: 0,167.

Случайные величины и математическое ожидание случайной величины

- №11. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



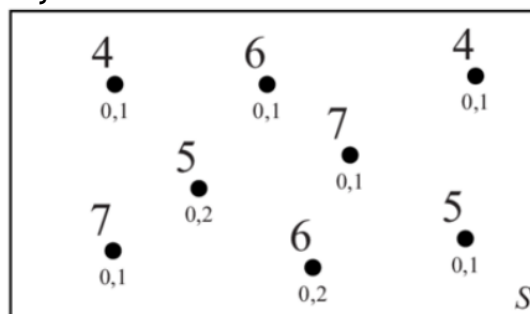
Найдите вероятность события $(X = 5)$.

Вероятность события $(X = 5)$: $P_1(5) = 0,2$; $P_2(5) = 0,1$; $P_3(5) = 0,1$.

В совокупности вероятность события $(X = 5)$: $P(5) = P_1 + P_2 + P_3 = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$.

Ответ: 0,4.

- №12. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



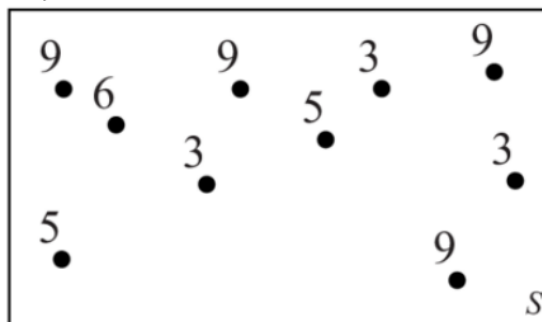
Найдите вероятность события $(5 \leq X < 7)$.

Вероятность события $(5 \leq X < 7)$: $P_1(5) = 0,2$; $P_2(5) = 0,1$; $P_3(6) = 0,1$; $P_4(6) = 0,2$.

В совокупности вероятность события $(5 \leq X < 7)$: $P(5) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,6$.

Ответ: 0,6.

- №13. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X = 9)$.

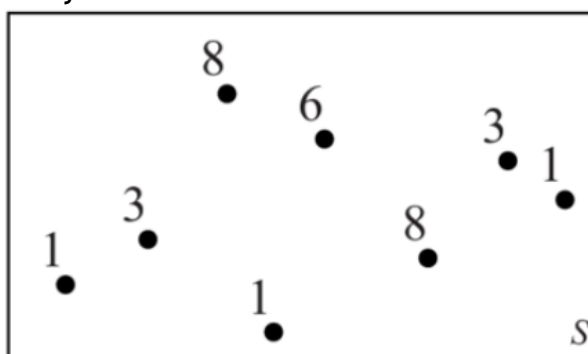
В случайном опыте S случайная величина X появляется 10 раз и, поскольку все элементарные события равновозможны, то вероятность одного события равна $\frac{1}{10} = 0,1$.

Вероятность события $(X = 9)$: $P_1(9) = P_2(9) = P_3(9) = P_4(9) = 0,1$.

В совокупности вероятность события $(X = 9)$: $P(9) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 4 \cdot 0,1 = 0,4$.

Ответ: 0,4.

- №14. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X \leq 4,7)$.

В случайном опыте S случайная величина X появляется 8 раз и, поскольку все элементарные события равновозможны, то вероятность одного события равна $\frac{1}{8} = 0,125$.

Вероятность события $(X \leq 4,7)$: $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(3) = P_5(3) = 0,125$.

В совокупности вероятность события $(X \leq 4,7)$: $P(9) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 5 \cdot 0,125 = 0,625$.

Ответ: 0,625.

- №15. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

- №16. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

$$\frac{990}{1000} \cdot 10 + \frac{6}{1000} \cdot 50 + \frac{3}{1000} \cdot 100 + \frac{1}{1000} \cdot 5000 = 9,9 + 0,3 + 0,3 + 5 = 15,5$$

Ответ: 34,5.

$$50 - 15,5 = 34,5$$

- №17. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции принцесс. Всего в коллекции 8 различных принцесс, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди принцесс есть Золушка. Первоклассница покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся две Золушки? Найдите математическое ожидание этой случайной величины. (16)

Поскольку Золушка встречается в среднем в одном случае из 8 купленных киндер-сюрпризов, то тогда математическое ожидание количества купленных киндер-сюрпризов для того, чтобы встретила одна Золушка равно 8.

Соответственно, математическое ожидание количества купленных киндер-сюрпризов для того, чтобы встретились 2 Золушки равно: $8 + 8 = 16$.

Ответ: 16.

- №18. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ », которую дает неравенство Чебышёва.

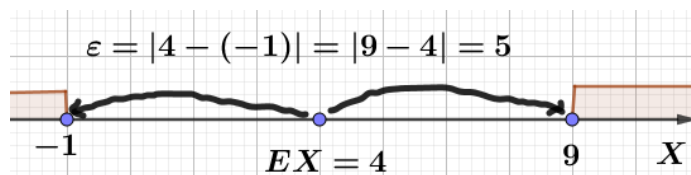
Математическое ожидание случайной величины - $EX = 4$, дисперсия - $DX = 10$.

Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине больше

положительного числа ε , не больше, чем $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно, $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Оценка вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ » равна $P(|x - 4| \geq 5) \leq \frac{10}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 0,4$.

Ответ: 0,4.



- №19. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите нижнюю оценку вероятности события « $0 < X < 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

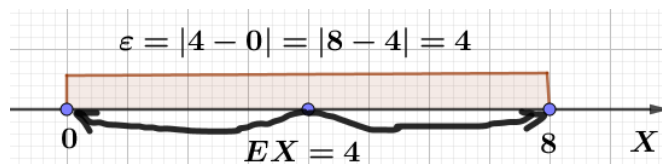
Математическое ожидание случайной величины - $EX = 4$, дисперсия - $DX = 10$.

Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем

$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно, $P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Оценка вероятности события « $0 < X < 8$ » равна $P(|x - 4| < 4) \geq 1 - \frac{10}{4^2} = 1 - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Ответ: 0,375.



- №20. Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,4 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,8 мм».

Средний диаметр подшипника - $EX = 24$, стандартное отклонение от среднего диаметра - $\sigma = 0,4$, диаметр случайно выбранного подшипника (случайной величины X) отличается от среднего более чем на $\varepsilon = 0,8$. Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что

$$P(|X - 24| > 0,8) \leq \frac{0,4^2}{0,8^2} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

- №21. Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от среднего более чем на 0,75 мм».

Сторона квадратной керамической плитки - $EX = 30$, стандартное отклонение - $\sigma = 0,6$, сторона случайно выбранной керамической плитки (случайной величины X) отличается от среднего более чем на $\varepsilon = 0,75$.

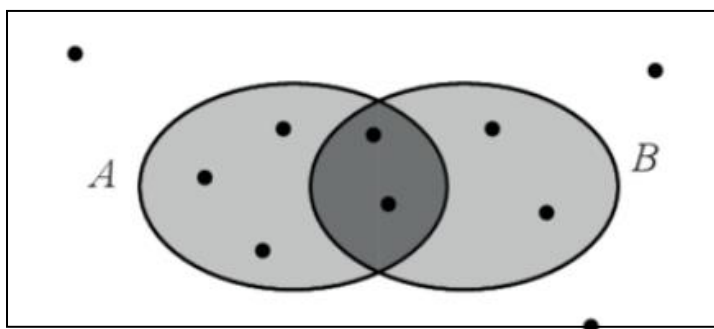
Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что

$$P(|X - 30| > 0,75) \leq \frac{0,6^2}{0,75^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3}\right)^2 = 0,8^2 = 0,64.$$

Ответ: 0,64.

Условная вероятность

- №22. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \text{вероятность события } B, \text{ при условии, что произошло событие } A.$$

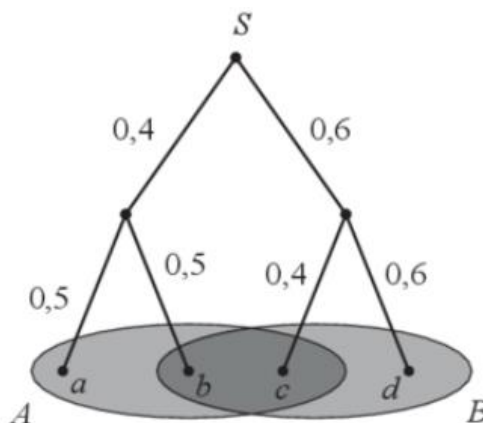
$$P(A) = \frac{5}{10} - \text{всего 10 событий, из них 5 событий } A.$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10} - \text{всего 10 событий, из них 2 события являются пересечением событий } A \text{ и } B.$$

$$P(B|A) = \frac{2}{10} : \frac{5}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

- №23. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ - вероятность события A , при условии, что произошло событие B .

$P(B) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,8$ - вероятность события B .

$P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,44$ - вероятность пересечения двух событий A и B .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,44}{0,8} = 0,55.$$

Ответ: 0,55.

Рекурсии

- №24. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = 0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Пусть P_0 – вероятность попасть в точку (-1) , если вначале мы находились в точке 0.

Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью $p = 0,8$ или вниз с вероятностью $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$ и эти события несовместны, то $P_0 = q + p \cdot P_1$, где P_1 – вероятность попасть в точку (-1) , находясь в точке 1.

Так как P_0 – это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то $P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2$.

Тогда получим уравнение

$$P_0 = q + p \cdot P_1$$

$$P_0 = q + p \cdot P_0^2$$

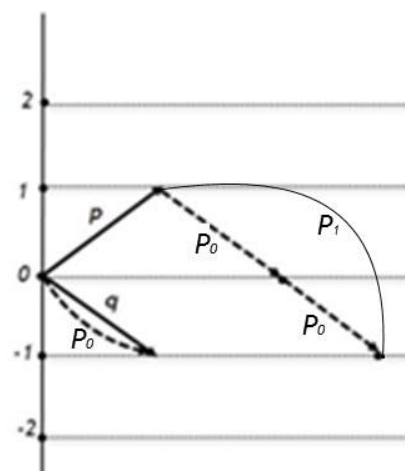
$$p \cdot P_0^2 - P_0 + q = 0$$

$$0,8 \cdot P_0^2 - P_0 + 0,2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,36$$

$$P_0 = \frac{1 \pm 0,6}{1,6}, P_0 = 1 \quad P_0 = 0,25$$

Учитывая, что $P_0 < 1$, получим $P_0 = 0,25$.



Ответ: 0,25.

Викторины и турниры

№25. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

Всего 5 команд, в двух играх команда А выиграла. Вероятность победить в 3-ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выиграет
2	3 (среди них есть А)		
3	3(среди них есть А) +1 (более сильная) =4	$\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

Ответ: 0,75.

Всего 15 команд, в восьми играх команда А выиграла. Вероятность победить в 9-ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выиграет
8	9 (среди них есть А)		
9	9(среди них есть А) +1 (более сильная) =10	$\frac{1}{10}$	$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9$

В n играх команда А выиграла. Вероятность победить в $n+1$ -ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выиграет
n	$n+1$ (среди них есть А)		
$n+1$	$n+1$ (среди них есть А) +1 (более сильная) = $n+2$	$\frac{1}{n+2}$	$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

№26. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

Пусть в турнире по олимпийской системе участвуют n игроков, тогда проводится $n-1$ игра. Разбить

игроков на произвольные пары можно $k = \frac{n(n-1)}{2}$ способами. Для каждого турнира построим дерево игр, в

вершинах которого укажем имена двух встретившихся в соответствующей игре игроков. Любая пара игроков в турнире может сыграть друг с другом не больше одного раза. Выберем один из турниров. Рассмотрим событие, состоящее в том, что двое наперед выбранных игроков встретились в первой игре первого тура.

Вероятность этого события равна $\frac{1}{k}$, то есть $\frac{2}{n(n-1)}$. Выбираем вторую игру первого тура, третью и т. д.

до последней игры $n-1$ -й игры последнего тура. Эти события равновероятны и несовместимы, а поэтому

искомая вероятность их суммы равна $(n-1) \cdot \frac{1}{k} = (n-1) \cdot \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$.

$$n = 8, \quad P = \frac{2}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

№27. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 10 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

В каждом матче выбывает один игрок, поэтому состоится ровно 9 игр. Рассмотрим случайный эксперимент, который состоит в случайном выборе одной пары, а именно - пары, куда войдут два наших игрока. То есть мы не обращаем никакого внимания на ход турнира, а просто выбираем подмножества множества пар. Всего

в эксперименте $k = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ равновозможных элементарных событий (пар), а событию "пара

Иван-Алексей окажется среди сыгранных", благоприятствуют 9 из них. Следовательно, получим $\frac{9}{45} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

Статистика

№28. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 1,4 1,2 1,3 1,4 и 1,2.

По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Среднее значение выборки $E = \frac{1,4 + 1,2 + 1,3 + 1,4 + 1,2}{5} = 1,3$.

Дисперсия выборки - среднее значение квадрата отклонения значений совокупности от среднего значения

выборки $D_{\text{выб.}} = \frac{(1,4 - 1,3)^2 + (1,2 - 1,3)^2 + (1,3 - 1,3)^2 + (1,4 - 1,3)^2 + (1,2 - 1,3)^2}{5} = \frac{4}{500}$.

Несмещенная оценка генеральной совокупности $D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{500} = 0,01$.

Ответ: 0,01.

№29. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели.

По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка:

520, 420, 440, 500, 520, 560, 520, 520, 560, 580 и 580 рублей.

По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.

Объем выборки $n = 11$. Среднее арифметическое всех вариантов - среднее значение выборки

$$E = \frac{420 + 440 + 500 + 4 \cdot 520 + 2 \cdot 560 + 2 \cdot 580}{11} = \frac{5720}{11} = 520.$$

Упорядоченная выборка	420	440	500	520	560	580
Частота варианты	1	1	1	4	2	2
Отклонение вариант от среднего	100	80	20	0	40	60
Квадрат отклонения	10000	6400	400	0	1600	3600

Дисперсия $D = \frac{10000 + 6400 + 400 + 2 \cdot 1600 + 2 \cdot 3600}{11} = \frac{27200}{11}$

Несмещенная оценка дисперсии $D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{11}{10} \cdot \frac{27200}{11} = 2720$.

Ответ: 2720.

- №30. При выборочном обследовании жителей города А. 12 из 24 респондентов ответили «Нет» на вопрос, понравился ли им новый торговый центр. Найдите интервальную оценку доли горожан, которым торговый центр не понравился, пользуясь правилом «частота плюс-минус одно стандартное отклонение». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Объем выборки $n = 24$, выборочная доля $\omega = \frac{12}{24} = 0,5$, число стандартного отклонения $t = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Доверительный интервал: } \omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}. \\ 0,5 - 1 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot (1-0,5)}{24}} < p < 0,5 + 1 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot (1-0,5)}{24}} \\ 0,5 - \frac{0,5}{2\sqrt{6}} < p < 0,5 + \frac{0,5}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Верхняя граница доверительного интервала: $0,5 + \frac{0,5}{2\sqrt{6}} \approx 0,5 + \frac{1}{4 \cdot 2,5} \approx 0,6$.

Ответ: 0,6.

- №31. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 12 из 36 случайных респондентов ответили «Нет» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, не имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус два стандартных отклонения». В ответе запишите длину доверительного интервала. Ответ округлите до десятых.

Объем выборки $n = 36$, выборочная доля $\omega = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, число стандартного отклонения $t = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Доверительный интервал: } \omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}. \\ \frac{1}{3} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{36}} < p < \frac{1}{3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{36}} \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9} < p < \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

Длина доверительного интервала: $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} \approx 0,3$.

Ответ: 0,3.

■ Тест

5. Разные задачи

Задачи на проценты

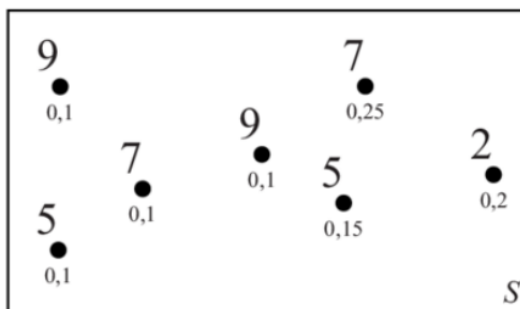
- №1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.
-
- №2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 40% этих стекол, вторая - 60%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол, а вторая - 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется без брака.
-
- №3. На фабрике керамической посуды 20% произведенных пиал имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90% дефектных пиал. Остальные пиалы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке пиала не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.
-
- №4. В городе 44% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 14,4% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".
-
- №5. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?
-
- №6*. Три технологические линии выполняют разлив и упаковку в бутылки газированной воды «Минеральная». Первая линия дает 5% брака, и ее загружают на 20% объема производства газированной воды. Вторая линия дает 2% брака, и ее загружают на 30% объема производства газированной воды. Третья линия, самая современная, дает 1% брака, и ее загружают на 50% объема производства газированной воды. Какова вероятность того, что случайно взятая в выпущенной партии бутылка воды «Минеральная» окажется бракованной?
-
- №7*. На двух линиях выпускают одинаковые лампы. Первая линия выпускает в два раза больше ламп, чем вторая, но вероятность брака на первой линии равна 0,1, а на второй 0,04. Все лампы поступают на склад. Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа на складе окажется не бракованной.

Вычисление вероятностей с помощью комбинаторной формулы

- №8*. Из 10 билетов 2 являются выигрышным. Наугад берут 3 билета. Найдите вероятность того, что среди них хотя бы один окажется выигрышным. Ответ округлите до сотых.
-
- №9. Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов. Какова вероятность того, что первыми пятью выстрелами стрелок сбил хотя бы четыре мишени?
-
- №10. На испытаниях робот должен найти и выдать со склада девять различных упаковок с товаром. На то, чтобы найти все девять упаковок, роботу потребовалось 11 попыток. Считая, что вероятность успешного поиска при каждой попытке одна и та же, найдите вероятность того, что среди первых пяти попыток было хотя бы две неудачных. Результат округлите до тысячных.

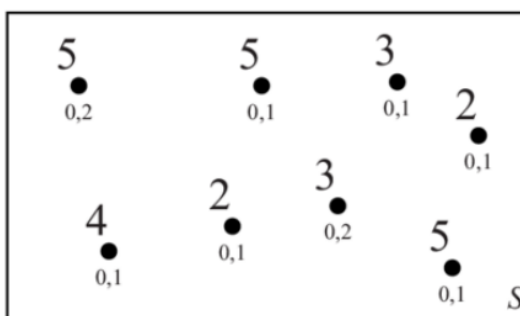
Случайные величины и математическое ожидание случайной величины

- №11. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



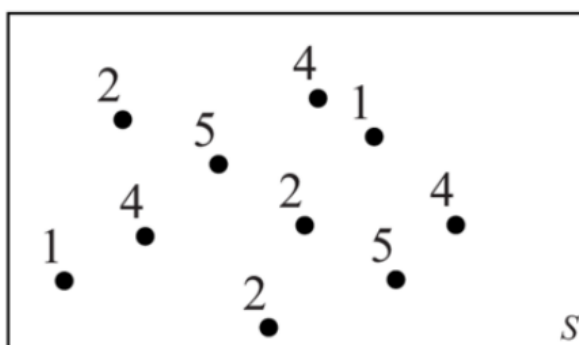
Найдите вероятность события $(X \leq 9, 2)$.

- №12. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



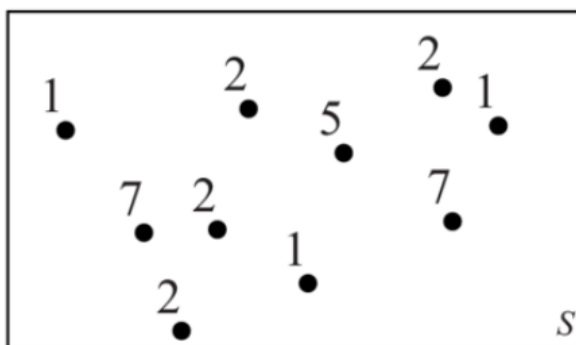
Найдите вероятность события $(2 < X \leq 5)$.

- №13. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X = 4)$.

- №14. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X \leq 5, 7)$.

- №15. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

- №16. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Количество билетов	990	5	4	1

- №17. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции бегемотов. Всего в коллекции 12 различных бегемотов, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди них есть бегемот в кепке. Первоклассник покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся два одинаковых бегемота в кепке? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

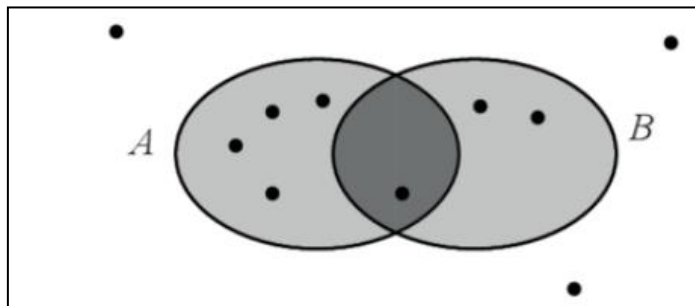
- №18. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

- №19. Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм».

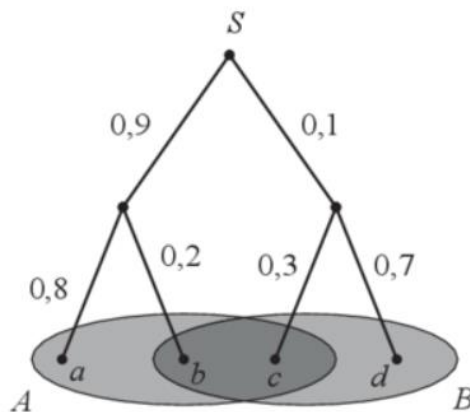
- №20. Известно, что средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 500 г, а стандартное отклонение от средней массы равно 40 г. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отличается от средней более чем на 75 г». Ответ округлите до тысячных.

Условная вероятность

- №21. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



- №22. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



Рекурсии

- №23. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{13}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

Викторины и турниры

- №24. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвертый раунд.
- №25. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 32 игрока, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

- №26. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

Статистика

- №27. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 22, 20, 22, 20, 23, 24, 22, 24 и 21. По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.
-
- №28. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 690, 750, 710, 770, 810, 850, 690, 850, 850, 850 и 870 рублей. По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.
-
- №29. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 24 из 36 случайных респондентов ответили «Да» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала.

■ Ответы (тест) 5. Разные задачи

№1	№2	№3	№4	№5	№6*	№7*	№8*	№9	№10	№11	№12	№13
0,5	0,984	0,98	0,2	0,325	0,021	0,92	0,53	0,5	0,222	1	0,8	0,3

№14	№15	№16	№17	№18	№19	№20	№21	№22	№23	№24	№25	№26
0,8	-0,1	85,2	24	0,625	0,16	0,284	0,2	0,75	0,3	0,8	0,0625	0,08

№27	№28	№29
2,25	4960	0,8

■ Решение (тест)

5. Разные задачи

№1. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства - яйца высшей категории, а из второго хозяйства - 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Пусть первое домашнее хозяйство поставляет в агрофирму всего x яиц, из них $0,6x$ — яйца высшей категории, а второе хозяйство поставляет y яиц, из них $0,3y$ — яйца высшей категории.

Всего высшую категорию получают 45% яиц: $0,6x + 0,3y = 0,45(x + y)$, $x = y$.

Вероятность того, что купленное у этой агрофирмы яйцо окажется из первого хозяйства, равна

$$\frac{x}{x + y} = \frac{x}{2x} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

№2. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 40% этих стекол, вторая - 60%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол, а вторая - 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется без брака.

Пусть всего произведено x стекол для фар. Первая фабрика выпускает $0,4x$ этих стекол, а вторая - $0,6x$.

Бракованные стекла на первой фабрике $0,01 \cdot 0,4x = 0,004x$, на второй фабрике - $0,02 \cdot 0,6x = 0,012x$.

Всего бракованных стекол с двух фабрик $0,004x + 0,012x = 0,016x$.

Вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $\frac{0,016x}{x} = 0,016$.

Тогда вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется без брака, равна $1 - 0,016 = 0,984$.

Ответ: 0,984.

№3. На фабрике керамической посуды 20% произведенных пиал имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90% дефектных пиал. Остальные пиалы поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке пиала не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Пусть всего производится на фабрике x пиал. Из них имеют дефект 20% или $0,2x$, тогда в продажу поступают 80% пиал без дефекта или $0,8x$. При контроле качества продукции выявляется только 90% дефектных пиал, значит, 10% дефектных пиал уйдет в продажу, а именно, $0,1 \cdot 0,2x = 0,02x$. Таким образом, в продажу поступает $0,8x$ тарелок без дефекта и $0,02x$ с дефектом. Всего поступило в продажу

$0,82x$ тарелок. Вероятность купить тарелку без дефекта $\frac{0,8x}{0,82x} = \frac{40}{41} \approx 0,975... \approx 0,98$. Ответ: 0,98.

№4. В городе 44% взрослого населения - мужчины. Пенсионеры составляют 14,4% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 10%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером".

Пусть в городе всего x жителей, тогда мужчин - $0,44x$, а женщин - $0,56x$. Пенсионеров $0,144x$, а женщин среди пенсионеров - $0,1 \cdot 0,56x = 0,056x$. Пенсионеров среди мужчин $0,144x - 0,056x = 0,088x$. Тогда

вероятность события "выбранный мужчина является пенсионером" равна $\frac{0,088x}{0,44x} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

- №5. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Пусть x – число больных пациентов и y – число здоровых. Тогда имеется всего $(x + y)$ пациентов. Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0,1(x + y)$, из которых $0,91x$ тестов подтверждается у больных и $0,07y$ положительных тестов у здоровых пациентов. Тогда

$$0,1(x + y) = 0,91x + 0,07y$$

$$0,1y - 0,07y = 0,91x - 0,1x$$

$$y = 27x$$

Вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна

$$\frac{0,91x}{0,1(x + y)} = \frac{0,91x}{0,1(x + 27x)} = \frac{0,91x}{2,8x} = 0,325.$$

Ответ: 0,325.

- №6*. Три технологические линии выполняют разлив и упаковку в бутылки газированной воды «Минеральная». Первая линия дает 5% брака, и ее загружают на 20% объема производства газированной воды. Вторая линия дает 2% брака, и ее загружают на 30% объема производства газированной воды. Третья линия, самая современная, дает 1% брака, и ее загружают на 50% объема производства газированной воды. Какова вероятность того, что случайно взятая в выпущенной партии бутылка воды «Минеральная» окажется бракованной?

Пусть x бутылок воды – это выпущенная партия.

Линия	Загрузка	Брак в %	Брак (в количестве бутылок)
I	$0,2x$	$5\% = 0,05$	$0,05 \cdot 0,2x = 0,01x$
II	$0,3x$	$2\% = 0,02$	$0,02 \cdot 0,3x = 0,006x$
III	$0,5x$	$1\% = 0,01$	$0,01 \cdot 0,5x = 0,005x$

Всего бракованных бутылок в партии $0,01x + 0,006x + 0,005x = 0,021x$.

Вероятность взять бракованную бутылку равна $P = \frac{0,021x}{x} = 0,021$.

Ответ: 0,021.

- №7*. На двух линиях выпускают одинаковые лампы. Первая линия выпускает в два раза больше ламп, чем вторая, но вероятность брака на первой линии равна 0,1, а на второй 0,04. Все лампы поступают на склад. Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа на складе окажется не бракованной.

Пусть на второй линии выпускают x ламп, тогда на первой линии выпускают $2x$ ламп. Значит, всего на склад поступают $2x + x = 3x$ ламп. Количество бракованных ламп на первой линии $0,1 \cdot 2x = 0,2x$, а на второй линии – $0,04x$. Всего бракованных ламп $0,2x + 0,04x = 0,24x$. Вероятность выбрать бракованную лампу равна $\frac{0,24x}{3x} = 0,08$. Тогда вероятность противоположного события «выбрать не бракованную лампу» равна $1 - 0,08 = 0,92$.

Ответ: 0,92.

Вычисление вероятностей с помощью комбинаторной формулы

№8*. Из 10 билетов 2 являются выигрышным. Наугад берут 3 билета. Найдите вероятность того, что среди них хотя бы один окажется выигрышный. Ответ округлите до сотых.

1) Всего способов выбрать 3 билета из 10: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120$.

2) $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$ – число способов выбрать 3 проигрышных билета из 8.

3) Вероятность того, что нет выигрышных билетов $\frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

4) Вероятность того, что есть хотя бы один выигрышный $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \approx 0,533... \approx 0,53$. Ответ: 0,53.

№9. Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов. Какова вероятность того, что первыми пятью выстрелами стрелок сбил хотя бы четыре мишени?

На 11 выстрелов приходится 8 попаданий и 3 промаха. Поскольку стрелку потребовалось 11 выстрелов, чтобы поразить все 8 мишеней, то 11-й выстрел – это попадание. Определим сколько всего вариантов того, как могут сойтись 3 промаха (-) и 7 попаданий (+) в мишень при 10 выстрелах, например, (+ + + + + + + +, + + + + + + + -, - + + + + + + + и т.д.).

$$N = C_{10 \text{ выстрелов}}^{3 \text{ промаха}} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

По условию стрелок первыми пятью выстрелами сбивает хотя бы 4 мишени. Определим количество таких благоприятных событий.

1) Первыми пятью выстрелами поразил 5 мишеней, на следующие 5 выстрелов 2 попадания и 3 промаха.

Например, $\underbrace{+ + + + +}_{\text{Поразил 5 мишеней первыми пятью выстрелами: } C_5^5} \underbrace{+ + - - -}_{\text{3 промаха на оставшиеся 5 выстрелов: } C_5^3}.$

Всего таких комбинаций $C_5^5 \cdot C_5^3 = 1 \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 10$.

2) Первыми пятью выстрелами поразил 4 мишени, на следующие 5 выстрелов 3 попадания и 2 промаха.

Например, $\underbrace{+ + + + -}_{\text{Поразил 4 мишени первыми пятью выстрелами: } C_5^4} \underbrace{+ + + - -}_{\text{2 промаха на оставшиеся 5 выстрелов: } C_5^2}.$

Всего таких комбинаций $C_5^4 \cdot C_5^2 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5}{4! \cdot 2 \cdot 3!} = 50$.

Тогда количество событий, благоприятных событию "первыми пятью выстрелами стрелок сбил хотя бы четыре мишени" равно $10 + 50 = 60$.

И вероятность такого события равна $\frac{60}{120} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

- №10. На испытаниях робот должен найти и выдать со склада девять различных упаковок с товаром. На то, чтобы найти все девять упаковок, роботу потребовалось 11 попыток. Считая, что вероятность успешного поиска при каждой попытке одна и та же, найдите вероятность того, что среди первых пяти попыток было хотя бы две неудачных. Результат округлите до тысячных.

Роботу на 11 попыток найти нужную упаковку приходится 9 удачных и 2 неудачных. Поскольку последняя 11 попытка удачная, то определим сколько вариантов того, как могут сочетаться 8 удачных (+) и 2 неудачных (-) при 10 попытках, например, (---+++++, +-----, и т.д.).

$$N = C_{10}^{2 \text{ неудача}} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2} = 45.$$

Поскольку неудачных попыток было всего 2, то по условию задачи, они должны быть среди первых пяти попыток. Например,

$$\underbrace{+ \ - \ + \ - \ +}_{5 \text{ попыток} - 2 \text{ неудачи, } 3 \text{ удачные: } C_5^2} \quad \underbrace{+ \ + \ - \ - \ -}_{5 \text{ попыток} - \text{ все удачные: } C_5^5}.$$

$$\text{Всего таких комбинаций } C_5^2 \cdot C_5^5 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 10.$$

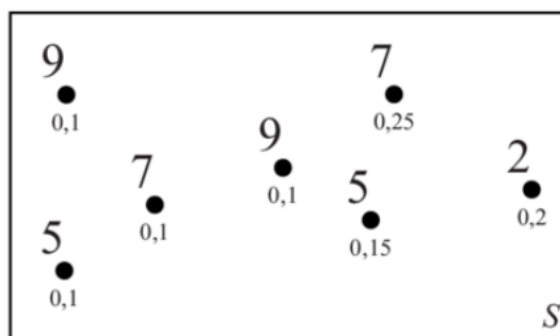
Тогда количество событий, благоприятных событию А "среди первых пяти попыток было хотя бы две неудачных" равно $N(A) = 10$.

$$\text{И вероятность такого события равна } P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} \approx 0,222.$$

Ответ: 0,222.

Случайные величины и математическое ожидание случайной величины

- №11. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X \leq 9, 2)$.

Вероятность события $(X \leq 9, 2)$:

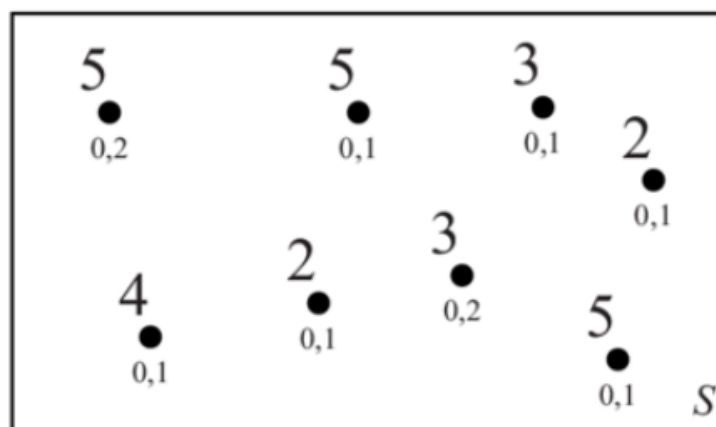
$$P_1(2) = 0,2; \quad P_2(5) = 0,1; \quad P_3(5) = 0,15; \quad P_4(7) = 0,1; \quad P_5(7) = 0,25; \quad P_6(9) = P_7(9) = 0,1.$$

В совокупности вероятность события $(X \leq 9, 2)$:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 0,2 + 0,1 + 0,15 + 0,1 + 0,25 + 0,1 + 0,1 = 1.$$

Ответ: 1.

- №12. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(2 < X \leq 5)$.

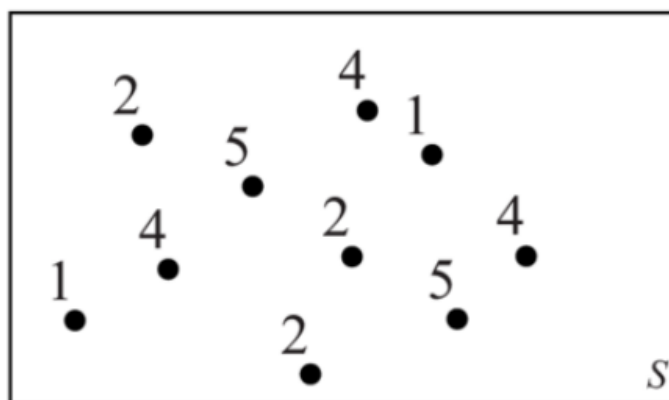
Вероятность события $(2 < X \leq 5)$: $P_1(3) = 0,1$; $P_2(3) = 0,2$; $P_3(4) = 0,1$; $P_4(5) = P_5(5) = 0,1$; $P_6(5) = 0,2$

В совокупности вероятность события $(2 < X \leq 5)$:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

- №13. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X = 4)$.

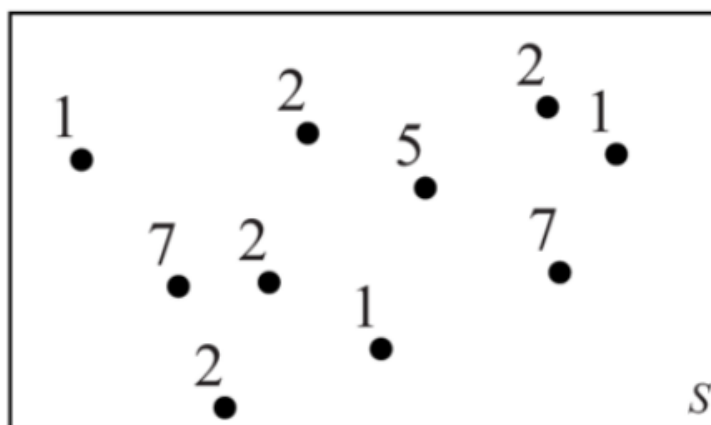
В случайном опыте S случайная величина X появляется 10 раз и, поскольку все элементарные события равновозможны, то вероятность одного события равна $\frac{1}{10} = 0,1$.

Вероятность события $(X = 4)$: $P_1(4) = P_2(4) = P_3(4) = 0,1$.

В совокупности вероятность события $(X = 4)$: $P(9) = P_1 + P_2 + P_3 = 3 \cdot 0,1 = 0,3$.

Ответ: 0,3.

- №14. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X .



Найдите вероятность события $(X \leq 5, 7)$.

В случайном опыте S случайная величина X появляется 10 раз и, поскольку все элементарные события равновозможны, то вероятность одного события равна $\frac{1}{10} = 0,1$.

Вероятность события $(X \leq 5, 7)$: $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(2) = P_5(2) = P_6(2) = P_7(2) = P_8(5) = 0,1$.

В совокупности вероятность события $(X \leq 5, 7)$: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = 8 \cdot 0,1 = 0,8$.

Ответ: 0,8.

- №15. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

$$EX = -5 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Ответ: - 0,1.

- №16. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Количество билетов	990	5	4	1

$$\frac{990}{1000} \cdot 20 + \frac{5}{1000} \cdot 1000 + \frac{4}{1000} \cdot 10\,000 + \frac{1}{1000} \cdot 50\,000 = 19,8 + 5 + 40 + 50 = 114,8$$

$$200 - 114,8 = 85,2$$

Ответ: 85,2.

№17. В киндер-сюрпризах встречаются игрушки из коллекции бегемотов. Всего в коллекции 12 различных бегемотов, причем все они встречаются в киндер-сюрпризах одинаково часто. Среди них есть бегемот в кепке. Первоклассник покупает киндер-сюрпризы, а игрушки из них кладет в ящик стола. Сколько будет куплено киндер-сюрпризов к моменту, когда в столе окажутся два одинаковых бегемота в кепке? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Поскольку бегемот в кепке встречается в среднем в одном случае из 12 купленных киндер-сюрпризов, то тогда математическое ожидание количества купленных киндер-сюрпризов для того, чтобы встретился один бегемот в кепке равно 12.

Соответственно, математическое ожидание количества купленных киндер-сюрпризов для того, чтобы встретились 2 бегемота в кепке равно: $12+12 = 24$.

Ответ: 24.

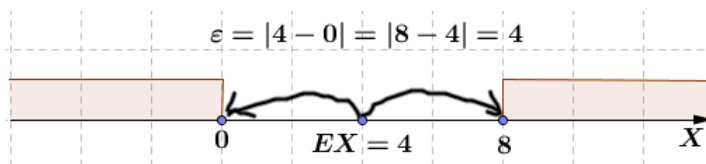
№18. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

Математическое ожидание случайной величины -

$EX = 4$, дисперсия - $DX = 10$.

Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине больше

положительного числа ε , не больше, чем $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно, $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$.



Оценка вероятности события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ » равна $P(|x - 4| \geq 4) \leq \frac{10}{4^2} = \frac{10}{16} = 0,625$. Ответ: 0,625.

№19. Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм».

Средний диаметр подшипника - $EX = 15$, стандартное отклонение от среднего диаметра - $\sigma = 0,2$, диаметр случайно выбранного подшипника (случайной величины X) отличается от среднего более чем на $\varepsilon = 0,5$.

Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что $P(|X - 15| > 0,5) \leq \frac{0,2^2}{0,5^2} = 0,16$.

Ответ: 0,16.

№20. Известно, что средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 500 г, а стандартное отклонение от средней массы равно 40 г. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отличается от средней более чем на 75 г». Ответ округлите до тысячных.

Средняя масса упаковки - $EX = 500$, стандартное отклонение от средней массы - $\sigma = 40$, масса наполнителя в случайно выбранной упаковке (случайной величины X) отличается от средней массы

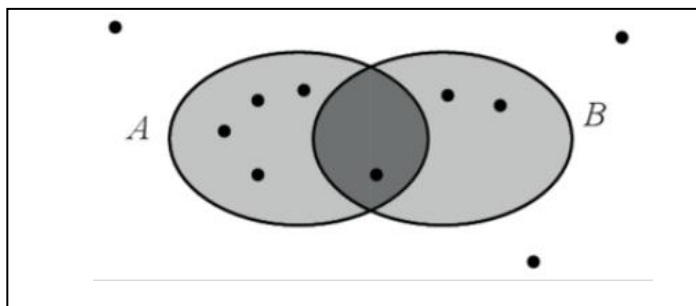
упаковки более чем на $\varepsilon = 75$. Тогда по неравенству Чебышева $P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ получим, что

$$P(|X - 500| > 75) \leq \frac{40^2}{75^2} \approx 0,284.$$

Ответ: 0,284.

Условная вероятность

- №21. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ – условную вероятность события B при условии A .



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - \text{вероятность события } B, \text{ при условии, что произошло событие } A.$$

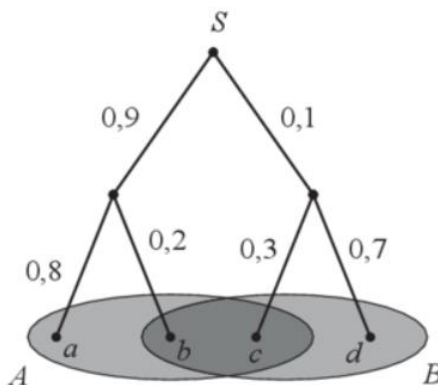
$$P(A) = \frac{5}{10} - \text{всего 10 событий, из них 5 событий } A.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \text{всего 10 событий, из них 1 событие является пересечением событий } A \text{ и } B.$$

$$P(B|A) = \frac{1}{10} : \frac{5}{10} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

- №22. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c, d . Найдите $P(A|B)$ – условную вероятность события A при условии B .



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \text{вероятность события } A, \text{ при условии, что произошло событие } B.$$

$$P(B) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,28 - \text{вероятность события } B.$$

$$P(A \cap B) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,21 - \text{вероятность пересечения двух событий } A \text{ и } B.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,21}{0,28} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

Рекурсии

№23. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{13}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Пусть X – вероятность того, что при выходе из какого-либо числа мы придем к числу, которое на 1 меньше исходного. В частности, при выходе из 0 придем к (-1) , т. е. X – искомая вероятность.

$$p = \frac{10}{13} \quad q = 1 - p = 1 - \frac{10}{13} = \frac{3}{13}$$

$$X = q + p \cdot X^2$$

$$\frac{10}{13} \cdot X^2 - X + \frac{3}{13} = 0$$

$$10X^2 - 13X + 3 \quad D = 169 - 4 \cdot 10 \cdot 3 = 49$$

$$X = \frac{13 \pm 7}{20}, \quad X_1 = 1 \quad X_2 = 0,3$$

Учитывая, что $X < 1$, получим $X = 0,3$.

Ответ: 0,3.

Викторины и турниры

№24. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выигрывает четвертый раунд.

I способ

Ранжируем 6 команд по силе игры. Это можно сделать $6! = 720$ способами. Пусть каждый из таких способов – это элементарное событие. Тогда число исходов, ведущих к событию X "команда А выиграла в первых трех играх", равно $C_6^4 \cdot 3! \cdot 2!$ (4 способами выбираем 4 команды, включая А, затем умножаем на количество способов переставить местами трех соперников команды А, затем умножаем на число способов переставить местами две оставшиеся команды). Аналогично, число исходов, ведущих к событию Y "команда А выиграла в первых четырех играх", равно $C_6^5 \cdot 4! \cdot 1!$.

Вероятность второго события при условии первого;

$$\frac{C_6^5 \cdot 4! \cdot 1!}{C_6^4 \cdot 3! \cdot 2!} = \left(\frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 4! \right) : \left(\frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 3! \cdot 2! \right) = \frac{6! \cdot 4! \cdot 1!}{5 \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3!}{5 \cdot 3!} = \frac{4}{5} = 0,8$$

II способ

6 команд, в 3-х играх команда А выиграла. Вероятность победить в 4-м раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда А проиграет	Вероятность того, что команда А выигрывает
3	4 (среди них есть А)		
4	4(среди них есть А) +1 (более сильная) =5	$\frac{1}{5}$	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

Ответ: 0,8.

- №25. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием. Всего в турнире участвует 32 игрока, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

Ответ: 0,0625.

- №26. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Ответ: 0,08.

Статистика

- №27. Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений: 22, 20, 22, 20, 23, 24, 22, 24 и 21. По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Среднее значение выборки $E = \frac{2 \cdot 20 + 21 + 3 \cdot 22 + 23 + 2 \cdot 24}{9} = 22.$

Дисперсия выборки - среднее значение квадрата отклонения значений совокупности от среднего значения

выборки $D_{\text{выб.}} = \frac{2 \cdot (20 - 22)^2 + (21 - 22)^2 + 3 \cdot (22 - 22)^2 + (23 - 22)^2 + 2 \cdot (24 - 22)^2}{9} = 2.$

Несмещенная оценка генеральной совокупности $D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{9}{8} \cdot 2 = 2,25.$

Ответ: 2,25.

- №28. С помощью выборочного исследования изучают цены на карты памяти определенной модели. По данным из одиннадцати независимых магазинов получена следующая выборка: 690, 750, 710, 770, 810, 850, 690, 850, 850, 850 и 870 рублей. По этой выборке сделайте несмещенную оценку дисперсии цен на эту модель карты.

Объем выборки $n = 11$. Среднее арифметическое всех вариантов - среднее значение выборки

$$E = \frac{2 \cdot 690 + 710 + 750 + 770 + 810 + 4 \cdot 850 + 870}{11} = \frac{8690}{11} = 790.$$

Упорядоченная выборка	690	710	750	770	810	850	870
Частота варианты	2	1	1	1	1	4	1
Отклонение вариант от среднего	100	80	40	20	20	60	80
Квадрат отклонения	10000	6400	1600	400	400	3600	6400

$$\text{Дисперсия } D = \frac{2 \cdot 10000 + 6400 + 1600 + 400 + 400 + 4 \cdot 3600 + 6400}{11} = \frac{49600}{11}$$

$$\text{Несмещенная оценка дисперсии } D_{\text{несм.}} = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{выб.}} = \frac{11}{10} \cdot \frac{49600}{11} = 4960.$$

Ответ: 4960.

- №29. При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек» 24 из 36 случайных респондентов ответили «Да» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответе запишите верхнюю границу доверительного интервала.

Объем выборки $n = 36$, выборочная доля $\omega = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, число стандартного отклонения $t = 2$.

$$\text{Доверительный интервал: } \omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

$$\frac{2}{3} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)}{36}} < p < \frac{2}{3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)}{36}}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{18} < p < \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{18}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9} < p < \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{Верхняя граница доверительного интервала: } \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} \approx \frac{6 + \sqrt{2}}{9} \approx 0,8.$$

Ответ: 0,8.

- ✓ **Случайным** называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.
- ✓ Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \text{ где } N - \text{общее число равновозможных исходов, } N(A) - \text{число}$$

благоприятных для этого события исходов.

Вероятность любого события A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

- ✓ События A и $\bar{A}$ называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ значит, } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- ✓ Если монету бросают n раз, то имеется 2^n равновозможных исходов.

Если бросают n игральных костей (кубиков), то имеется 6^n равновозможных исходов. Столько же исходов получается, если один и тот же кубик бросают n раз.

- ✓ Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B . Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A или B . Тогда C называют **объединением событий** A и B : $C = A \cup B$.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- ✓ Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

Пусть событие C означает, что произошло как событие A , так и B .

Тогда C называют **пересечением событий** A и B : $C = A \cap B$.

Если события A и B независимы, то вероятность из пересечения равна произведению вероятностей событий A и B : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

- ✓ Вероятность $P(B|A)$ называется **условной вероятностью** события B , если произошло

$$\text{событие } A \text{ с вероятностью } P(A): P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- ✓ Вероятность $P(A|B)$ называется **условной вероятностью** события A , если произошло

$$\text{событие } B \text{ с вероятностью } P(B): P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- ✓ Частотой события A называют отношение $\frac{m}{n}$, где n – общее число испытаний, m – число появлений события A .

- ✓ Число способов, которым можно выбрать k из n заданных элементов без учета порядка, в котором мы их выбираем $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- ✓ Вероятность k успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p

$$P(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- ✓ Математическое ожидание случайной величины - это сумма произведений значений этой величины и их вероятностей: $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$
- ✓ Дисперсией числового ряда называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего арифметического
- ✓ Стандартным (или средним квадратичным) отклонением числового ряда называется квадратный корень из дисперсии