

Диагностика МЦКО по математике

10 класс 22.04.2026 Примерный Вариант 2

Алгебра

№1. В некоторой фирме 25% сотрудников не знают ни одного иностранного языка. Остальные сотрудники владеют одним или несколькими иностранными языками. Пятая часть тех сотрудников, кто владеет хотя бы одним иностранным языком, знают испанский язык. Сколько процентов сотрудников фирмы знают испанский язык?

Решение: Пусть всего сотрудников фирмы $x - 100\%$, тогда $0,25x$ сотрудников не знают ни одного иностранного языка. Владеют хотя бы одним иностранным языком $x - 0,25x = 0,75x$. Знают испанский язык $-\frac{1}{5} \cdot 0,75x = 0,15x$. Тогда $\frac{0,15x}{x} \cdot 100\% = 15\%$ всех сотрудников знают испанский язык.

Ответ: 15.

№2. Найдите значение выражения $\frac{4^{\frac{2}{6}}}{0,5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5}$.

Решение: $\frac{4^{\frac{2}{6}}}{0,5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5} = \frac{(2^2)^{\frac{17}{6}}}{(2^{-1})^{-\frac{8}{3}} \cdot 5} = \frac{2^{\frac{17}{3}}}{2^{\frac{8}{3}} \cdot 5} = \frac{2^{\frac{17}{3}-\frac{8}{3}}}{5} = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1,6$.

Ответ: 1,6.

№3. Вычислите $16 \cos \frac{17\pi}{12} \cdot \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \right)$.

Решение:

$$\begin{aligned} 16 \cos \frac{17\pi}{12} \cdot \sin \left(-\frac{17\pi}{12} \right) &= -8 \cdot 2 \cdot \cos \frac{17\pi}{12} \cdot \sin \frac{17\pi}{12} = -8 \sin \left(2 \cdot \frac{17\pi}{12} \right) = -8 \sin \frac{17\pi}{6} = \\ &= -8 \sin \left(2\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = -8 \sin \frac{5\pi}{6} = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4 \end{aligned}$$

Ответ: -4.

№4. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , в которой $b_1 = 54$, $b_2 = 36$, $b_3 = 24$.

Решение: $S = \frac{b_1}{1-q}$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$. $S = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \frac{54 \cdot 3}{1} = 162$.

Ответ: 162.

№5. На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, которые пересекаются в начале координат и в точке A . Найдите абсциссу точки A .

Решение:

$$1) g(x) = kx, (5; 1) \in g(x), 1 = k \cdot 5, k = \frac{1}{5}, g(x) = \frac{x}{5}.$$

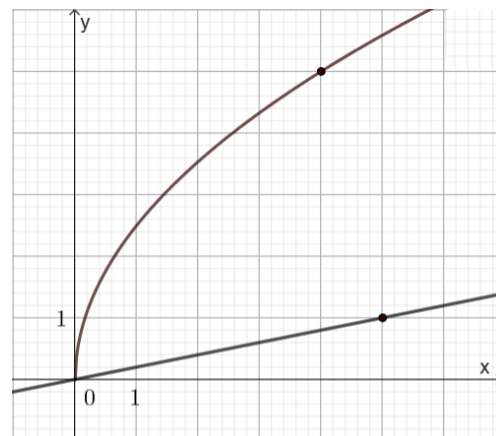
$$2) f(x) = a\sqrt{x}, (4; 5) \in f(x), 5 = a\sqrt{4},$$

$$a = \frac{5}{2}. f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}.$$

$$3) \begin{cases} g(x) = \frac{x}{5} \\ f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x} \end{cases}, \frac{x}{5} = \frac{5}{2}\sqrt{x}, 2x = 25\sqrt{x},$$

$$4x^2 = 625x, x(4x - 625) = 0,$$

$$x_0 = 0, x_A = \frac{625}{4} = 156,25$$



Ответ: 156,25.

№6. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение:

1) $\alpha \in III$ или VI четверти, так как $\cos \alpha > 0$, то $\alpha \in IV$, где $\sin \alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}; \quad 2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} : \frac{\sqrt{17}}{17} = -4. \quad \text{Ответ: } -4.$$

№7. Найдите количество корней уравнения $(\cos^2 x - 3\sin^2 x) \left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x \right) = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{7\pi}{4}\right]$.

Решение:

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x = 0$$

$$1 - 3\tg^2 x = 0 \quad 2\sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos x (2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

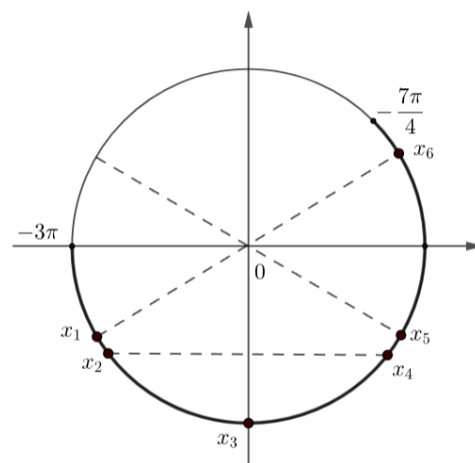
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \cos x = 0 \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$m \in \mathbb{Z}$$



Ответ: 6.

№8. Решите неравенство $\frac{2x^2 + 5x - 88}{\sqrt{23 - 2x}} \leq 0$. В ответе запишите наибольшее целое решение неравенства, принадлежащее отрезку $[-150; 150]$.

Решение:

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 88 \leq 0 \\ 23 - 2x > 0 \end{cases}, \begin{cases} (x+8)(x-5,5) \leq 0 \\ x < 11,5 \end{cases}, x \in [-8; 5,5]. \text{ Наибольшее целое, являющееся решением}$$

неравенства и принадлежащее отрезку $[-150; 150]$ $x = 5$.

Ответ: 5.

№9. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x+a)^2 - y^2 = 0 \\ (x-2)^2 = 1 - y^2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. В ответе запишите наименьшее целое из них.

Решение:

$$\begin{cases} (x+a)^2 - y^2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \oplus, (x+a)^2 + (x-2)^2 = 1, 2x^2 + 2x(a-2) + a^2 + 3 = 0 (*). \text{ Система уравнений имеет}$$

хотя бы одно решение, если квадратное уравнение (*) имеет хотя бы одно решение, т. е. при $D \geq 0$.

$$D/4 = (a-2)^2 - 2 \cdot (a^2 + 3) = -a^2 - 4a - 2, -a^2 - 4a - 2 \geq 0, a^2 + 4a + 2 \leq 0,$$

$$(a - (-2 - \sqrt{2}))(a - (-2 + \sqrt{2})) \leq 0, a \in [-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}].$$

При каждом таком a существует хотя бы одно x , а значит, и $y = \pm(x+a)$, то есть система имеет хотя бы одно решение. Других ограничений нет. $a = -2 - \sqrt{2} \approx -2 - 1,4 \approx -3,4$.

Наименьшее целое значение $a = -3$.

Ответ: -3.

Геометрия

№1. Известно, что в треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол ABC равен 32° . Найдите острый угол между биссектрисой угла A и стороной BC . Ответ дайте в градусах.

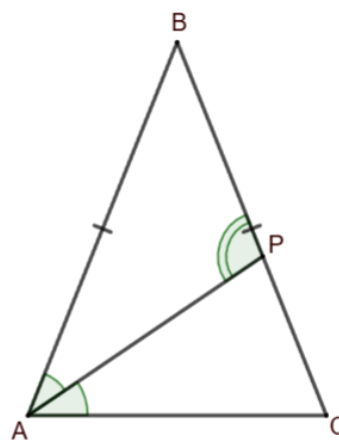
Решение:

В равнобедренном треугольнике ABC углы при основании AC равны.

$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ.$$

$\angle APC$ — острый угол между биссектрисой угла A и стороной BC .

$\angle APC = 180^\circ - (\angle PAC + \angle PCA)$ как внешний угол $\triangle APC$.



Ответ: 69.

$$\angle APC = 180^\circ - \left(\frac{74^\circ}{2} + 74^\circ \right) = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$$

№2. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с острым углом 30° можно вписать окружность. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 40.

Решение:

Высота трапеции равна двум радиусам вписанной в нее окружности. $CH = h = 2r$. В прямоугольном треугольнике CHD $\angle CDH = 30^\circ$, тогда

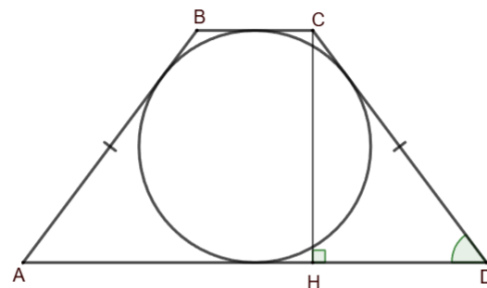
$CD = 2CH = 2 \cdot 2r = 4r$. Трапеция равнобедренная, значит, $AB = CD = 4r$.

По свойству сторон описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$, тогда $AD + BC = 2 \cdot 4r = 8r$.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(AD + BC) = 2 \cdot 8r = 16r$, $40 = 16r$, $r = 2,5$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{8r}{2} \cdot 2r = 8 \cdot \frac{25}{4} = 50.$$

Ответ: 50.



№3. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{55}$, точка K – середина ребра AD . Синус угла между прямыми KC_1 и AB_1 .

Решение:

В плоскости BCC_1 проведем $DC_1 \parallel AB_1$, значит,

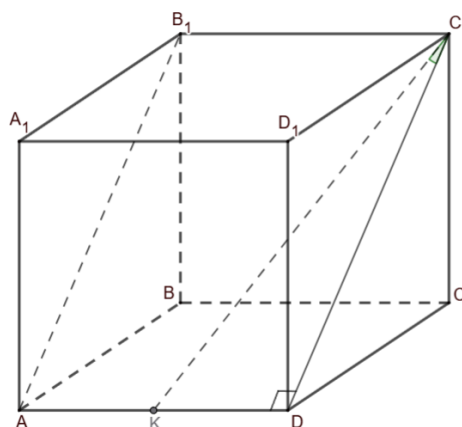
$$\angle(KC_1, AB_1) = \angle(KC_1, DC_1) = \angle KC_1 D.$$

В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат, и она прямая. $AD \perp DCC_1$, следовательно, $\triangle KDC_1$ – прямоугольный.

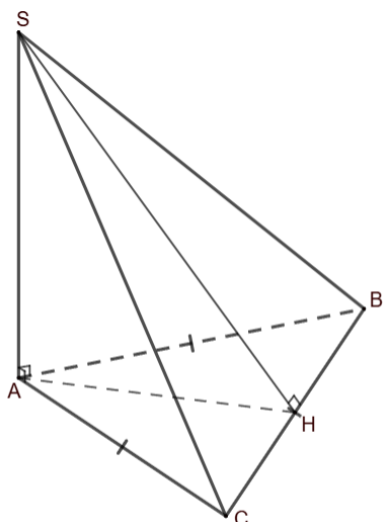
$$\triangle ABB_1 \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{55})^2} = \sqrt{91}.$$

$$\triangle KDC_1 \quad KC_1 = \sqrt{KD^2 + DC_1^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{91})^2} = 10, \quad \sin \angle KC_1 D = \frac{KD}{KC_1} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Ответ: 0,3.



№4. Равносторонний треугольник ABC , в котором $AB = 2\sqrt{15}$, является основание пирамиды $SABC$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от вершины S до прямой BC , если $SA = 2$.



Решение:

В плоскости основания пирамиды проведем $AH \perp BC$ и, поскольку ABC – равносторонний треугольник, то AH также является медианой и $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{15} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{5}$.

$SA \perp ABC$, AH – проекция наклонной SH , следовательно, $SH \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит, SH – искомое расстояние.

В прямоугольном треугольнике SAH

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + (3\sqrt{5})^2} = 7.$$

Ответ: 7.

Вероятность и статистика

№5. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 22 спортсмена из Швеции, 19 из Дании и 9 из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий третьим, окажется из Дании.

Решение: Всего спортсменов $22 + 19 + 9 = 50$. Из Дании – 19. Вероятность, что третьим будет выступать спортсмен из Дании равна $\frac{19}{50} = \frac{38}{100} = 0,38$.

Ответ: 0,38.

№6. Среди 35 сотрудников фирмы английским языком владеют 18 человек, китайским – 12, причем среди них 4 сотрудника владеют двумя этими языками. Сколько сотрудников фирмы не владеют ни английским, ни китайскими языками?

Решение: $18 + 12 - 4 = 26$ – сотрудников владеют только каким-либо одним иностранным языком.

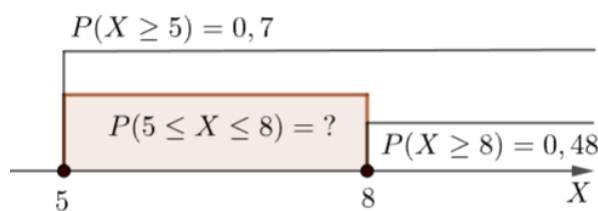
$35 - 26 = 9$ – сотрудников не владеют ни английским, ни китайскими языками.

Ответ: 9.

№7. В некотором случайном эксперименте рассматривается случайная величина X . Известно, что $P(X \geq 8) = 0,48$ и $P(X \geq 5) = 0,7$. Найдите $P(5 \leq X \leq 8)$.

Решение:

$$P(5 \leq X \leq 8) = P(X \geq 5) - P(X \geq 8) = 0,7 - 0,48 = 0,22$$



Ответ: 0,22.

№8. В ящике стола лежат 4 белых и 16 черных шаров. В другом ящике лежат 14 белых и 6 черных шаров. Случайным образом из каждого ящика берут по одному шару. Найдите вероятность того, что это будут шары разного цвета.

Решение:

Всего шаров в 1-м ящике – 20 и во 2-м ящике – 20.

$$\frac{4}{20} \cdot \frac{6}{20} + \frac{16}{20} \cdot \frac{14}{20} = 0,06 + 0,56 = 0,62 .$$

Ответ: 0,62.

вероятность
взять белый
шар из 1-го
ящика

вероятность
взять черный
шар из 2-го
ящика

или

вероятность
взять черный
шар из 1-го
ящика

вероятность
взять белый
шар из 2-го
ящика