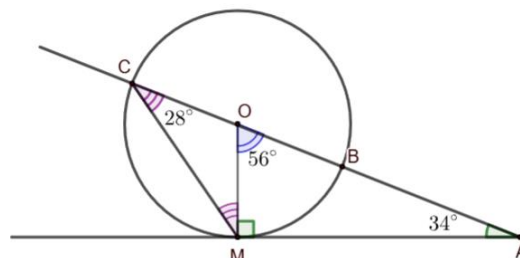


Решение Вариант 1

Часть 1

№1. Из точки A к окружности с центром O проведена касательная AM и секущая AC , проходящая через центр и пересекающая окружность в точке B , причем $AB < AC$. Найдите величину угла ACM , если $\angle MAC = 34^\circ$. Ответ дайте в градусах.



Решение:

$OM \perp AM$ как радиус, проведенный в точку касания. $\triangle AMO$ – прямоугольный с $\angle MAC = 34^\circ$, значит, $\angle MOC = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$. В равнобедренном $\triangle COM$ $\angle MOA$ – внешний, следовательно, $\angle CMO + \angle OCM = \angle MOA$, $2\angle OCM = 56^\circ$, $\angle OCM = 28^\circ$, $\angle ACM = 28^\circ$. Ответ: 28.

№2. Даны векторы $\vec{a}(-7; 5)$, $\vec{b}(2; -3)$ и $\vec{c}(0; 4)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

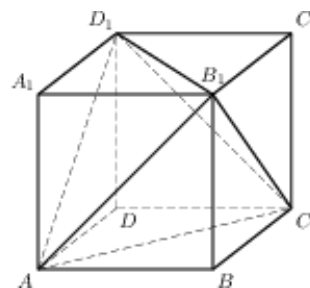
Решение:

$$1) \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = (-7; 5) + (2; -3) - \frac{1}{2}(0; 4) = (-5; 2) - (0; 2) = (-5; 0).$$

$$2) \left| \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \right| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Ответ: 5.

№3. Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен $7,2$. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Решение:

$V_{\text{парал}} = S_{ABCD} \cdot h = 7,2$. От параллелепипеда отсечем четыре равных тетраэдра. Найдём объем одного из них, например,

$$V_{B_1 ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABCD}}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 7,2 = 1,2. \quad V_{AD_1 CB_1} = V_{\text{парал}} - 4 \cdot V_{B_1 ABC} = 7,2 - 4 \cdot 1,2 = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

№4. В игре «Морской бой» на клетчатом поле 10×10 размещают четыре однопалубных корабля (одна клетка), три двухпалубных, два трехпалубных и один четырехпалубный. Первый игрок делает «выстрел» по случайной клетке. Какова вероятность, что он попадет в двухпалубный корабль?

Решение:

Всего клеток на поле $10 \cdot 10 = 100$. Двухпалубных кораблей три и каждый состоит из двух клеток,

следовательно, всего клеток такие корабли занимают $3 \cdot 2 = 6$. Искомая вероятность $P = \frac{6}{100} = 0,06$.

Ответ: 0,06.

№5. Зал выдачи наличных денежных средств банкоматами банка оснащен двумя типами датчиков безопасности: движения и лучевыми. В случае несанкционированного проникновения в зал первый датчик срабатывает с вероятностью 0,94, а второй - с вероятностью 0,93. Какова вероятность того, что сработает только один датчик в случае несанкционированного проникновения в зал выдачи наличных денежных средств банкоматами банка?

Решение:

$$0,94 \cdot \underbrace{(1-0,93)}_{\substack{\text{не работает} \\ \text{лучевой} \\ \text{датчик}}} + 0,93 \cdot \underbrace{(1-0,94)}_{\substack{\text{не работает} \\ \text{датчик} \\ \text{движения}}} = 0,94 \cdot 0,07 + 0,93 \cdot 0,06 = 0,0658 + 0,0558 = 0,1216.$$

Ответ: 0,1216.

№6. Найдите корень уравнения $\log_2(x+3) = \log_2 x + 1$.

Решение:

$$\log_2(x+3) = \log_2 x + \log_2 2, \quad \log_2(x+3) = \log_2 2x, \quad \begin{cases} x+3=2x \\ x>0 \end{cases}, \quad \underline{x=3}.$$

Ответ: 3.

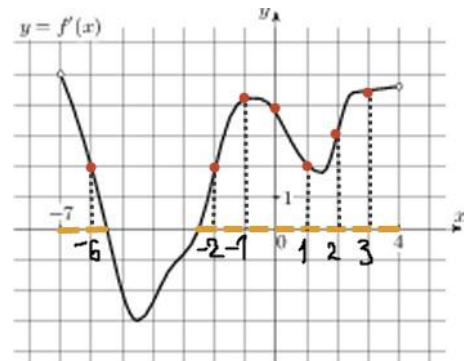
№7. Найдите значение выражения $\frac{9 \cos 60^\circ}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 198^\circ}$.

Решение:

$$\frac{9 \cos 60^\circ}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 198^\circ} = \frac{9 \cdot \frac{1}{2}}{\sin^2 18^\circ + \cos^2(180^\circ + 18^\circ)} = \frac{4,5}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

№8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Решение:

Выделим промежутки, где производная положительна, там функция будет возрастать. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \nearrow$

$$-6 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = -3.$$

Ответ: -3.

№9. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t – время, прошедшее от начального момента, T – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Решение:

$$m_0 = 40, \quad T = 10, \quad m = 5$$

$$5 = 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}, \quad 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{10}}, \quad -3 = -\frac{t}{10}, \quad t = 30$$

Ответ: 30.

№10. Смешали 2 кг 15% раствора кислоты и 4 кг 20% раствора той же кислоты, а затем добавили несколько кг воды. В результате получился 11% раствор кислоты. Сколько кг воды было добавлено?

Решение:

| Р-р | Всего (кг) | % содержание вещества в р-ре | Масса вещества в растворе (кг) |
|----------|---------------|------------------------------|--------------------------------|
| I | 2 | 15% | $0,15 \cdot 2 = 0,3$ |
| II | 4 | 20% | $0,2 \cdot 4 = 0,8$ |
| III | x | — | — |
| I+II+III | $2+4+x = x+6$ | 11% | $0,11(x+6) = 0,3+0,8$ |

$$0,11(x+6) = 1,1$$

$$11(x+6) = 110$$

$$x+6 = 10$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

№11. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

Решение:

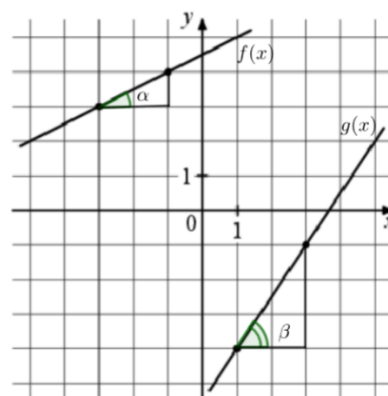
$$1) f(x) = k_1x + b_1; k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2};$$

$$(-1; 4) \quad 4 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + b_1; b_1 = \frac{9}{2}; \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}}$$

$$2) g(x) = k_2x + b_2; k_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2};$$

$$(1; -4) \quad -4 = \frac{3}{2} \cdot 1 + b_2; b_2 = -\frac{11}{2}; \quad \underline{\underline{g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}}}$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \end{cases}; \quad \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}; \quad x = 10.$$



Ответ: 10.

№12. Найдите наименьшее значение функции $y = 6^{x^2+16x+66}$ на отрезке $[-10; 10]$.

Решение:

$D(y) = (-\infty; +\infty)$. Возрастающая на $D(y)$ функция $y = 6^{f(x)}$ имеет сложный аргумент $f(x) = x^2 + 16x + 66$. Функция $f(x)$ - квадратичная, графиком является парабола, ветви вверх, достигает минимума в вершине

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2} = -8.$$

Из определения возрастающей функции: меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. В точке минимума аргумент принимает наименьшее значение, и заданная функция принимает наименьшее значение в этой же точке. $x_{\min} = -8 \in [-10; 10]$.

$$x_{\min} = -8 \rightarrow f_{\min}(-8) = (-8)^2 + 16 \cdot (-8) + 66 = 64 - 128 + 66 = 2$$

$$y_{\min} = 6^{f_{\min}(-8)} = 6^2 = 36$$

Ответ: 36.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sin x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[4\pi; 7\pi]$.

Решение: а)

$$\sin x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\sin x - \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \pi k \quad \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = 2\pi k \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n$$

б) I способ. Отбор корней с помощью двойного неравенства.

1) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$4\pi \leq 2\pi k \leq 7\pi, \quad 2 \leq k \leq 3,5$$

$$k = 2 \quad x_1 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

$$k = 3 \quad x_2 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

2) $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$4\pi \leq \frac{\pi}{2} + 4\pi n \leq 7\pi, \quad 8 \leq 1 + 8n \leq 14, \quad \frac{7}{8} \leq n \leq 1\frac{5}{8}$$

$$n = 1 \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$$

3) $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$$4\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 4\pi m \leq 7\pi, \quad 8 \leq -1 + 8m \leq 14, \quad 1\frac{1}{8} \leq m \leq 1\frac{7}{8}, \quad m \in \emptyset$$

Ответ: а) $2\pi k, \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, \{k, n\} \in \mathbb{Z}$; б) $4\pi, \frac{9\pi}{2}, 6\pi$.

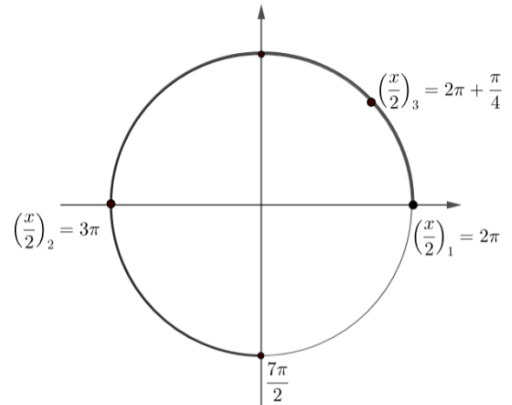
б) II способ.

$$\frac{x}{2} = \pi k, \quad \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad \{k, n\} \in \mathbb{Z}.$$

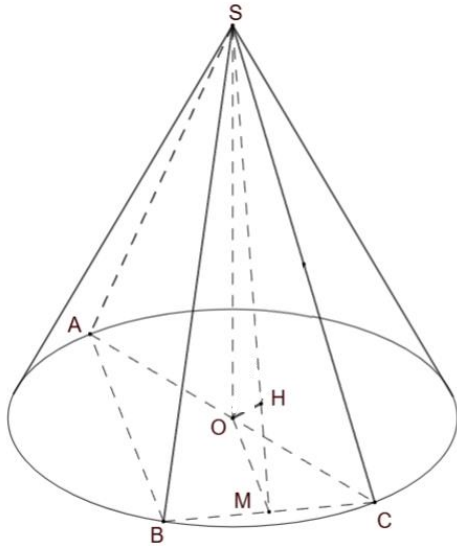
$$x \in [4\pi; 7\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_1 = 2\pi \Rightarrow x_1 = 4\pi; \quad \left(\frac{x}{2}\right)_2 = 3\pi \Rightarrow x_2 = 6\pi$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_3 = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{9\pi}{2}$$



- №14. Точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S , причем A и C диаметрально противоположны. Точка M – середина BC .
- а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC .
- б) Найдите высоту конуса, если угол между прямой AB и плоскостью SBC равен 60° , $AC = 10$, $BC = 6$.



Решение:

а) $\angle ABC = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AC .

Пусть точка O – центр основания конуса, значит, O – середина AC , M – середина BC , тогда OM – средняя линия треугольника ABC , поэтому $OM \parallel AB$ и $OM \perp BC$.

SO – высота конуса, OM – проекция наклонной SM на плоскость ABC , тогда $\angle(SM; ABC) = \angle(SM; OM) = \angle SOM$.

Поскольку $OM \perp BC$, то $SM \perp BC$, следовательно, $BC \perp SOM$, а значит и $SBC \perp SOM$. Проведем $OH \perp SM$, где $SM = SBC \cap SOM$, тогда $OH \perp SBC$. SM – проекция наклонной OM на плоскость SBC , тогда

$\angle(OM; SBC) = \angle(OM; SM) = \angle SMO$. Поскольку $OM \parallel AB$, то $\angle(AB; SBC) = \angle SMO$.

б) В прямоугольном треугольнике ABC $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$OM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ как средняя линия. $\angle(AB; SBC) = \angle SMO = 60^\circ$.

В прямоугольном треугольнике SOM $\operatorname{tg} \angle SOM = \frac{SO}{OM}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{4}$, $\sqrt{3} = \frac{SO}{4}$, $SO = 4\sqrt{3}$.

Ответ: б) $4\sqrt{3}$.

№15. Решите неравенство
$$\frac{\log_2 27}{\log_2 \frac{x}{81}} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 \frac{x}{27}}$$

Решение:

$$1) \frac{\log_2 27}{\log_2 \frac{x}{81}} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 \frac{x}{27}}$$

$$\log_{\frac{x}{81}} 27 \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \log_{\frac{x}{27}} 9$$

$$3 \log_{\frac{x}{81}} 3 \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot 2 \log_{\frac{x}{27}} 3$$

$$\frac{3}{\log_3 \frac{x}{81}} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{2}{\log_3 \frac{x}{27}}$$

$$\frac{3}{\log_3 x - 4} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{2}{\log_3 x - 3}$$

$$2) t = \log_3 x, \frac{3}{t-4} \leq \left(1 - \frac{1}{4-t}\right) \cdot \frac{2}{t-3}$$

$$\frac{3}{t-4} \leq \frac{3-t}{4-t} \cdot \frac{2}{t-3}, \frac{3}{t-4} \leq \frac{t-3}{t-4} \cdot \frac{2}{t-3}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{t-4} \leq \frac{2}{t-4}, \\ t \neq 3 \end{cases}, \begin{cases} \frac{1}{t-4} \leq 0, \\ t \neq 3 \end{cases}, \begin{cases} t-4 < 0 \\ t \neq 3 \end{cases}, \begin{cases} t < 4 \\ t \neq 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \log_3 x < 4 \\ \log_3 x \neq 3 \end{cases}, \begin{cases} \log_3 x < \log_3 81 \\ \log_3 x \neq \log_3 27 \end{cases}, \begin{cases} 0 < x < 81 \\ x \neq 27 \end{cases}$$

$$x \in (0; 27) \cup (27; 81)$$

Ответ: $(0; 27) \cup (27; 81)$.

- №16. В мае 2027 садовод планирует взять кредит в банке для строительства на участке летней кухни. Банк предоставляет кредит на следующих условиях:
- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по апрель необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Садовод рассчитал, что если ежегодно выплачивать по 41 472 рубля, то кредит можно будет полностью погасить за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 70 272 рубля, то кредит можно будет погасить за 2 года. Найдите r .

Решение:

Пусть S – сумма, которую взяли в кредит под $r\%$ годовых. Каждый январь оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент наращивания $k = 1 + \frac{r}{100}$. Пусть X – ежегодный платеж для погашения кредита.

Оставшаяся сумма долга после 1-го платежа: $S_1 = S \cdot k - X$.

Оставшаяся сумма долга после 2-го платежа: $S_2 = S_1 k - X = (S k - X) k - X = S k^2 - X k - X$.

Оставшаяся сумма долга после 3-го платежа: $S_3 = S_2 k - X = (S k^2 - X k - X) k - X = S k^3 - X k^2 - X k - X$.

Оставшаяся сумма долга после 4-го платежа:

$S_4 = S_3 k - X = (S k^3 - X k^2 - X k - X) k - X = S k^4 - X k^3 - X k^2 - X k - X$.

I схема погашения кредита за 4 года: $S_4 = 0$, $S = \frac{X_I (k^3 + k^2 + k + 1)}{k^4}$

II схема погашения кредита за 2 года: $S_2 = 0$, $S = \frac{X_{II} (k + 1)}{k^2}$.

S – одинаковая сумма кредита, то

$$\frac{X_I (k^3 + k^2 + k + 1)}{k^4} = \frac{X_{II} (k + 1)}{k^2}, \quad X_I (k^2 (k + 1) + (k + 1)) = X_{II} k^2 (k + 1),$$

$$X_I (k + 1) (k^2 + 1) = X_{II} k^2 (k + 1), \quad X_I (k^2 + 1) = X_{II} k^2 \quad (k > 0)$$

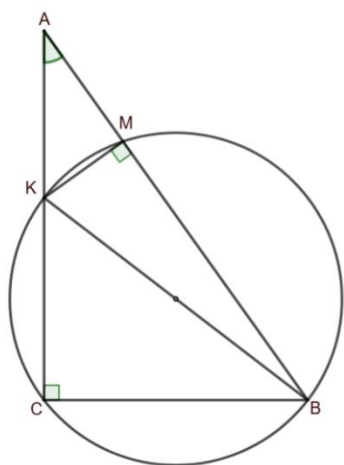
$$\frac{k^2 + 1}{k^2} = \frac{X_{II}}{X_I}, \quad 1 + \frac{1}{k^2} = \frac{70272}{41472}, \quad \frac{1}{k^2} = \frac{70272}{41472} - 1, \quad \frac{1}{k^2} = \frac{28800}{41472}, \quad k^2 = \frac{41472}{28800}, \quad k^2 = \frac{144}{100}, \quad k = 1,2.$$

$$k = 1 + \frac{r}{100}, \quad 1,2 = 1 + \frac{r}{100}, \quad r = 20$$

Ответ: 20.

- №17. Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K , гипотенузу в точке M
- а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.
- б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

Решение:



а) Четырехугольник $CKMB$ вписан в окружность. Следовательно, по свойству противоположных углов вписанного четырехугольника $\angle KCB + \angle KMB = 180^\circ$, тогда $90^\circ + \angle KMB = 180^\circ$, $\angle KMB = 90^\circ$. Прямоугольные треугольники AKM и ABC подобны по общему острому углу A .

б) Поскольку вписанный угол KCB равен 90° , то он опирается на диаметр окружности $BK = 2\sqrt{29}$. В прямоугольном треугольнике BCK найдем

$$CK = \sqrt{BK^2 - BC^2} = \sqrt{4 \cdot 29 - 4^2} = 10. \quad AK = AC - CK = 12 - 10 = 2.$$

$$\text{В } \triangle ABC \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}.$$

$$\triangle AKM \sim \triangle ABC, \text{ тогда } \frac{AK}{AB} = \frac{2}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = k \text{ и}$$

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = k^2, \quad \frac{S_{AKM}}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC} = \left(\frac{1}{2\sqrt{10}} \right)^2, \quad \frac{S_{AKM}}{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4} = \frac{1}{40}, \quad S_{AKM} = 0,6.$$

$$S_{CKMB} = S_{ABC} - S_{AKM} = 24 - 0,6 = 23,4.$$

Ответ: 23,4.

- №18. Найдите все значения a , при каждом из которых точки плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^3 + ay^2 + 2ay + 9y = \sqrt{27}x$$

Представляют собой график некоторой функции $y = f(x)$ при всех действительных значениях x .

Решение:

Уравнение $y^3 + ay^2 + 2ay + 9y = \sqrt{27}x$ можно переписать как $x = \frac{y^3 + ay^2 + (2a+9)y}{\sqrt{27}} = \frac{g(y)}{\sqrt{27}}$, где

$$g(y) = y^3 + ay^2 + (2a+9)y.$$

Чтобы множество точек (x, y) , удовлетворяющих этому равенству, было графиком некоторой функции $y = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого x существовало ровно одно y .

Поскольку $g(y)$ – кубический многочлен с положительным старшим коэффициентом, он будет строго монотонным (а значит, взаимно однозначным) тогда и только тогда, когда его производная $g'(y) = 3y^2 + 2ay + (2a+9)$ не меняет знак на \mathbb{R} , т. е. не имеет двух различных действительных корней. Дискриминант квадратного трехчлена: $D = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2a+9) = 4(a^2 - 6a - 27)$.

$$\text{Условие } D \leq 0 \text{ дает } a^2 - 6a - 27 \leq 0, \quad (a+3)(a-9) \leq 0, \quad a \in [-3; 9].$$

При $D < 0$ производная всегда положительна, при $D = 0$ она неотрицательна и обращается в нуль лишь в одной точке, но $g(y)$ остается строго возрастающей. Следовательно, для любого x существует единственное y , и уравнение задает функцию $y = f(x)$ на всей числовой прямой.

Ответ: $[-3; 9]$.

- №19. Юра и Полина играют в числа Полина выбирает несколько различных натуральных чисел от 25 до 75 включительно и находит их произведение (если выбрано только одно число, то произведением считается само это число). Юра к каждому числу, выбранному Полиной, прибавляет единицу и находит произведение полученных чисел.
- Может ли результат Юры оказаться в два раза больше, чем у Полины?
 - Может ли результат Юры оказаться в пять раз больше, чем у Полины?
 - В какое наибольшее целое число раз результат Юры может оказаться больше, чем результат у Полины?

Решение:

а) Пусть Полина выбрала различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_k из отрезка $[25; 75]$. Ее произведение $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$.

Юра к каждому числу прибавляет 1 и перемножает: $Q = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$.

$$\text{Тогда } \frac{Q}{P} = \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} = \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_k + 1}{a_k} = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

Каждый множитель $\left(1 + \frac{1}{a_i}\right) > 1$, и при $a_i \geq 25$ не превосходит $1 + \frac{1}{25} = 1,04$.

Если взять все числа от 25 до 75, то $\frac{26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 76}{25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 75} = \frac{76}{25} = 3,04$.

Для любого подмножества произведение не больше, чем для полного набора, так как добавление любого множителя больше 1 увеличивает его произведение. Следовательно, $\frac{Q}{P} \leq \frac{76}{25} < 4$.

Значит, целое отношение может быть только 1, 2 или 3.

а) Может ли $\frac{Q}{P} = 2$? Да. Выберем все числа от 25 до 49: $P = 25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 49$, $Q = 26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 50$, тогда

$$\frac{Q}{P} = \frac{26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 50}{25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 49} = \frac{50}{25} = 2.$$

б) Может ли $\frac{Q}{P} = 5$? Нет, так как максимально возможное отношение равно $\frac{76}{25} < 5$.

в) Наибольшее целое число раз.

Из оценки $\frac{Q}{P} \leq \frac{76}{25} < 4$ следует, что целое отношение не может быть больше 4. Покажем, что 3

достигается. Выберем все числа от 25 до 74: $P = 25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 74$, $Q = 26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 75$, тогда

$$\frac{Q}{P} = \frac{26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 75}{25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 74} = \frac{75}{25} = 3$$

Ответ: а) да, б) нет, в) 3.

▪ **Ответы**

| №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 | №7 | №8 | №9 | №10 | №11 | №12 |
|----|----|-----|------|--------|----|-----|----|----|-----|-----|-----|
| 28 | 5 | 2,4 | 0,06 | 0,1216 | 3 | 4,5 | -3 | 30 | 4 | 10 | 36 |

| №13 | №146 | №15 | №16 | №176 | №18 | №19 |
|--|-------------|--------------------------|-----|------|-----------|----------------------------|
| а) $2\pi k, \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n,$ $\{k, n\} \in \mathbb{Z}$ б) $4\pi, \frac{9\pi}{2}, 6\pi$ | $4\sqrt{3}$ | $(0; 27);$ $(27; 81)$ | 20 | 23,4 | $[-3; 9]$ | а) да; б) нет; в) 3. |