Досрочный ЕГЭ по математике (резервный день)

Профильный уровень

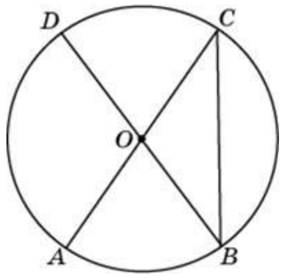
11 класс 16.04.2026

Примерный вариант

Часть 1

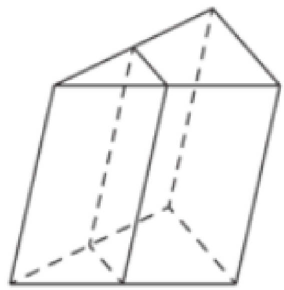
№1.

AC и BD – диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 16° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



№2. Даны векторы $\vec{a}(1;-3)$ и $\vec{b}(-4;2)$. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

№3. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



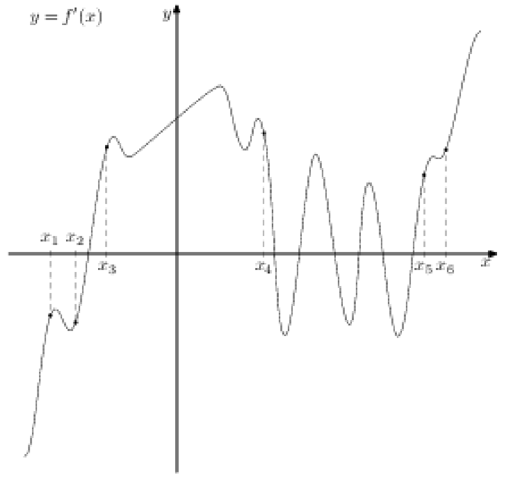
№4. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.

№5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№6. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5$.

№7. Найдите значение выражения $6\log_{\sqrt[6]{13}}13$.

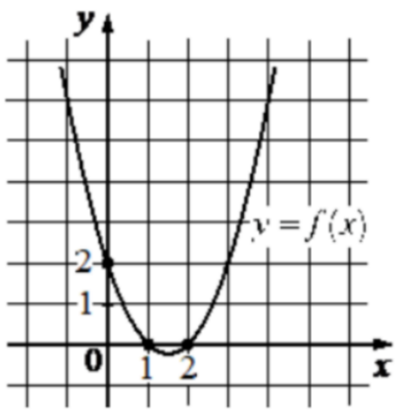
№8. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



№9. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

№10. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

№11. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-2)$.



№12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 13) - 2x + 7$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

№14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки M и N на серединах ребер A_1C_1 и BC соответственно.

а) Докажите, что плоскость AB_1M делит отрезок A_1N в отношении 2:3, считая от вершины A_1.

б) Найдите объем пирамиды $AMNB_1$, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.

№15. Решите неравенство $2\log_{\left(x^2-6x+10\right)^2}\left(5x^2+3\right)\le\log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)$.

№16. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей.

№17. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.
а) Доказать, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

№18. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[4;8]$.

№19. В продуктовом магазине есть весы с двумя чашами. На одну чашу весов кладут только продукты, на другую – гири. На чашу для гирь можно положить несколько гирь. Магазину разрешено продавать только целое число килограммов продуктов.

а) Можно ли некоторым набором из пяти гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?

б) Можно ли некоторым набором из четырех гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?

в) Найдите наибольшее значение n такое, что любой вес от 1 до n килограммов можно отвесить каким-нибудь набором из 5 гирь.

▪ *Ответы*

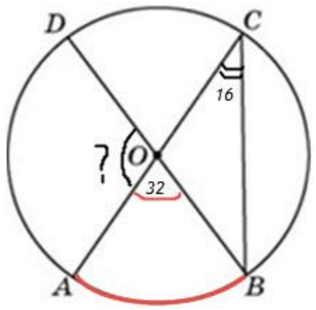
№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
148	*-10*	*8*	*0,2*	*0,52*	*35*	*36*	*2*	*6*	*20*	*12*	*13,5*

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$ *б)* $-\frac{11\pi}{6}$	$9\sqrt{3}$	$[0;3)\cup(3;7]$	*36 млн*	$\frac{121}{140}$	$a\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right);$ $\left\{-\frac{5}{2}\right\};(-2;1]$	*а) да;* *б) нет;* *в) 31.*

- ***Решение***

Часть 1

№1. AC **и** BD **— диаметры окружности с центром** O **. Угол** ACB **равен** 16° **. Найдите угол** AOD **. Ответ дайте в градусах.**



Решение:

1) $\underbrace{\angle AOB}_{\text{центральный}} = 2\cdot \underbrace{\angle ACB}_{\text{вписанный}} = 2\cdot 16^\circ = 32^\circ$

2) $\angle AOD$ и $\angle AOB$ - смежные углы

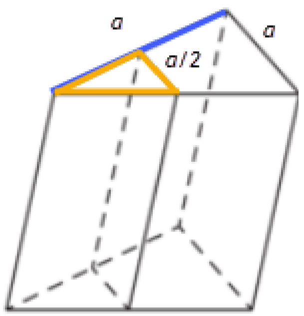
$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$

Ответ: 148.

№2. **Даны векторы** $\vec{a}(1;-3)$ **и** $\vec{b}(-4;2)$**. Найти скалярное произведение** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ **.**

Решение: $\vec{a}(1;-3)\cdot\vec{b}(-4;2) = 1\cdot(-4)+(-3)\cdot 2 = -10$. *Ответ: -10.*

№3. **Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.**



Решение:

Высота отсеченной призмы осталась неизменной, а в основании получился треугольник, подобный треугольнику, лежащему в основании исходной призмы с коэффициентом подобия 2. Поэтому $\frac{S_{осн.исх.призмы}}{S_{осн.отс.призмы}} = k^2 = 2^2 = 4$.

$\frac{V_{исх}}{V_{отс}} = \frac{S_{исх.осн.}\cdot h}{S_{осн.отс.}\cdot h}; \quad \frac{32}{V_{отс}} = 4; \; V_{отс} = 8$

Ответ: 8.

№4. **В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.**

Решение:

Пусть событие A "школьнику достанется вопрос в билете по ботанике". $N(A)=11$ - число благоприятных для этого события исходов, $N=55$ - общее число равновозможных исходов. Тогда вероятность события A равна $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

№5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:
Поскольку $0,3\cdot 0,3 \neq 0,12$, то события "кофе закончится в 1-м автомате" и "кофе закончится во 2-м автомате" зависимые. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		2-й автомат	
		Кофе закончился	*Кофе остался*
1-й автомат	*Кофе закончился*	$0,12$	$0,3-0,12=0,18$
	Кофе остался	$0,3-0,12=0,18$	$1-(0,12+0,18+0,18)=0,52$

Или другим способом. Событие A - кофе закончился в 1-м автомате и его вероятность $P(A)=0,3$. Событие B - кофе закончился во 2-м автомате и его вероятность $P(B)=0,3$. Событие $A\cap B$ - кофе закончился в двух автоматах и его вероятность $P(A\cap B)=0,12$. Событие $A\cup B$ - кофе закончился либо в 1-м автомате, либо во 2-м и его вероятность
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,3-0,12=0,48$.
Тогда вероятность события «кофе остался в обоих автоматах» равна $1-0,48=0,52$.

Ответ: 0,52.

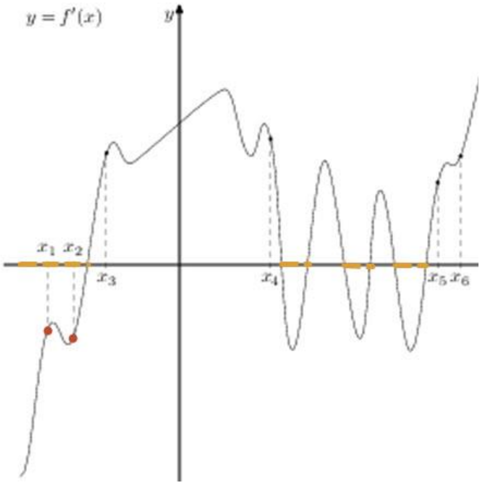
№6. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5$.

Решение: $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5,\quad \dfrac{2x+5}{3}=25,\quad 2x+5=75,\quad 2x=70,\quad \underline{x=35}$. *Ответ: 35.*

№7. Найдите значение выражения $6\log_{\sqrt[6]{13}}13$.

Решение: $6\log_{\sqrt[6]{13}}13=6\cdot\log_{13^{\frac{1}{6}}}13=6\cdot 6=36$. *Ответ: 36.*

№8. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Решение:
Выделим промежутки, где производная отрицательна, там функция будет убывать.
$f'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)\searrow$ В двух точках x_1, x_2 - функция убывает.

Ответ: 2.

№9. **Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.**

Решение:

$90 = 24t - \frac{3t^2}{2}$, $t^2 - 16t + 60 = 0$, $t_1 = 6$ $t_2 = 10$. Время торможения по смыслу задачи $t = 6$.

Ответ: 6.

№10. **От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.**

Решение: $t_I > t_{II}$ на 1 час

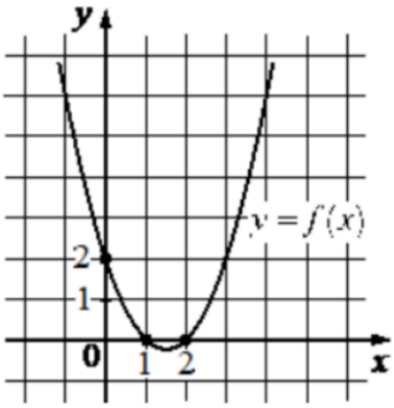
	V	S	t
I	$x \ (x > 0)$	420	$420/x$
II	$x+1$	420	$420/(x+1)$

$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+1} = 1;$ $420x + 420 - 420x - x(x+1) = 0$

$x^2 + x - 420 = 0,$ $D = 41^2,$ $x = \frac{-1 \pm 41}{2},$ $x > 0,$ $x = 20$

Ответ: 20.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-2)$.**



Решение:

1) $(0;2)$ $c = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + 2$

2) $x_в = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_в = \frac{1+2}{2}$, $x_в = \frac{3}{2}$; $x_в = -\frac{b}{2a}$, $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$, $b = -3a$

3) $(1;\ 0)$ $0 = a + b + 2,$ $a + b = -2$

4) $\begin{cases} a + b = -2 \\ b = -3a \end{cases}$, $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$

5) $f(x) = x^2 - 3x + 2,$ $f(-2) = 4 + 6 + 2 = 12$.

Ответ: 12.

№12. **Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 13) - 2x + 7$.**

Решение:

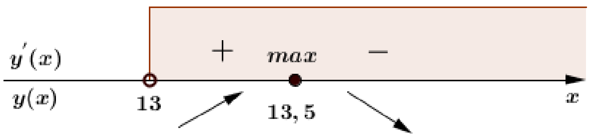
1) $D(y) = (13; \infty)$

$y' = \frac{1}{x-13} - 2,$ $y' = \frac{1 - 2x + 26}{x - 13} = \frac{-2x + 27}{x - 13}$

$y' = -\frac{2(x - 13,5)}{x - 13}$

2) $y' = 0$, $x = 13,5$

3)



$x_{max} = 13,5$

Ответ: 13,5.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение** $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение: а)

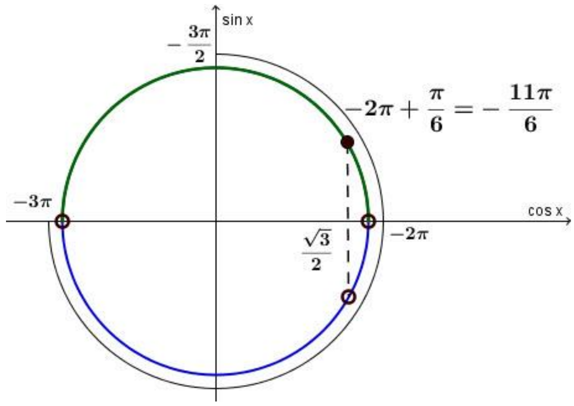
$$\begin{cases}4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}=0\\ \sqrt{7\sin x}\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}2^{2\sin 2x}=2^{2\sqrt{3}\sin x} & (1)\\ \sin x>0\end{cases}$$

$$(1)\quad 2\sin 2x=2\sqrt{3}\sin x$$

$$2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$

$$\sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\sin x=0\qquad \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Учитывая, что $\sin x>0$, получим $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$.

б) Корень, принадлежащий отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$:

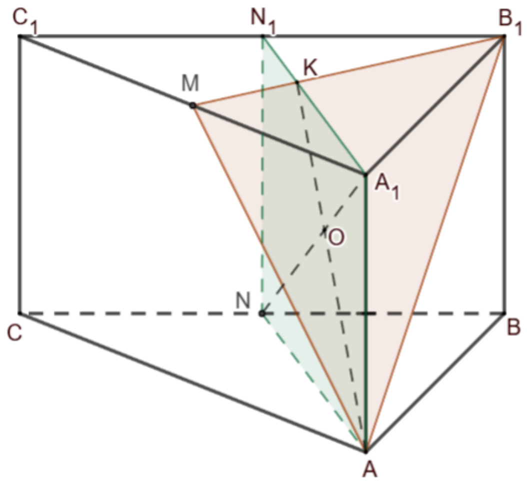
$x=-\dfrac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\dfrac{11\pi}{6}$.

№14. **В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки M и N на серединах ребер A_1C_1 и BC соответственно.**

а) Докажите, что плоскость AB_1M делит отрезок A_1N в отношении 2:3, считая от вершины A_1.

б) Найдите объем пирамиды $AMNB_1$, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.



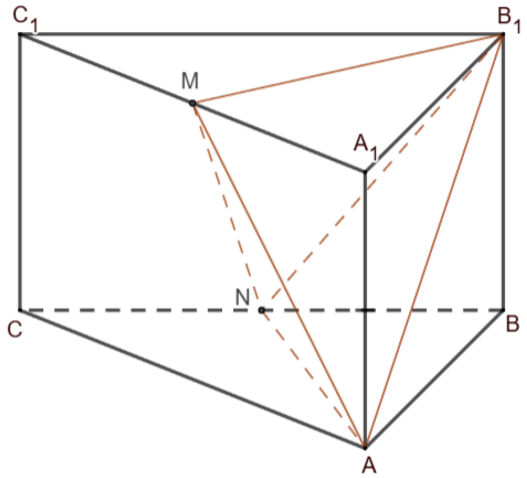
Решение:

а) $A_1N\subset NAA_1$ и $NAA_1\cap AB_1M=AK$ ($MB_1\cap A_1N_1=K$), $A_1N\cap AK=O$, значит, $A_1N\cap AB_1M=O$.

Призма правильная, следовательно, в основаниях лежат правильные треугольники. A_1N_1 и B_1M медианы $\triangle A_1B_1C_1$, значит, $K-$ точка пересечения медиан этого треугольника.

Следовательно, $\dfrac{A_1K}{KN_1}=\dfrac{2}{1}$ или $\dfrac{A_1K}{A_1N_1}=\dfrac{2}{3}$.

Правильная призма - прямая, значит, четырехугольник AA_1N_1N- прямоугольник. $\triangle AON\sim\triangle KOA_1$ (по двум углам), тогда $\dfrac{A_1K}{NA}=\dfrac{A_1O}{ON}$; $\dfrac{A_1O}{ON}=\dfrac{2}{3}$.



б) $V_{AMNB_1} = \frac{1}{6} \cdot MB_1 \cdot AN \cdot AA_1 \cdot \sin\angle(MB_1; AN)$.

$AN = MB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \ AA_1 = 4$.

В равностороннем треугольнике угол между медианами равен 60°, поэтому угол между скрещивающимися прямыми, содержащими медианы MB_1 и AN равен 60°.

$V_{AMNB_1} = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$.

Ответ: б) $9\sqrt{3}$.

№15. **Решите неравенство** $2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3) \le \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$.

<u>I способ</u>

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3) \le \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$$

$$\log_{x^2-6x+10}(5x^2+3) \le \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$$

$$\frac{\lg(5x^2+3)}{\lg(x^2-6x+10)} - \frac{\lg(4x^2+7x+3)}{\lg(x^2-6x+10)} \le 0$$

$$\frac{\lg(5x^2+3) - \lg(4x^2+7x+3)}{\lg(x^2-6x+10) - \lg 1} \le 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{(5x^2+3)-(4x^2+7x+3)}{(x^2-6x+10)-1} \le 0 \\ 5x^2+3>0 \\ 4x^2+7x+3>0 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7x}{x^2-6x+9} \le 0 \\ (x+1)\left(x+\dfrac{3}{4}\right)>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{x(x-7)}{(x-3)^2} \le 0 \\ (x+1)\left(x+\dfrac{3}{4}\right)>0 \end{cases}$$

$$x \in [0;3) \cup (3;7]$$

<u>II способ</u>

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3) \le \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$$

$$\log_{(x-3)^2+1}(5x^2+3) \le \log_{(x-3)^2+1}(4x^2+7x+3)$$

Заметим, что при всех $x \ne 3$ основание логарифма $(x-3)^2+1>1$, тогда

$$5x^2+3 \le 4x^2+7x+3$$

$$x^2-7x \le 0$$

$$x(x-7) \le 0$$

$$x \in [0;7]$$

Но, учитывая, $x \ne 3$, получим $x \in [0;3) \cup (3;7]$.

Ответ: $[0;3) \cup (3;7]$.

№16. **В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где $S-$ целое число, на 4 года. Условия возврата таковы:**
- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Год	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей.

Решение:

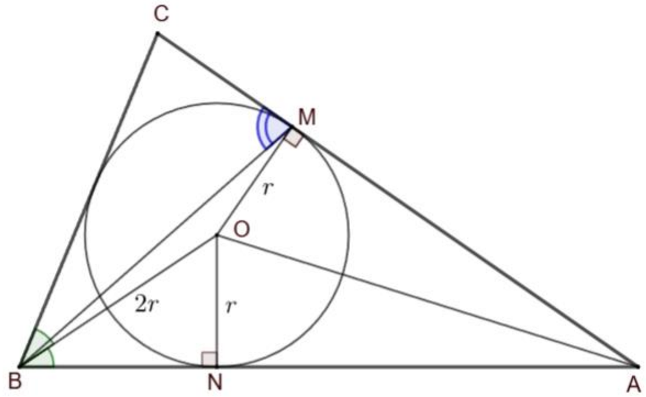
Год	*Долг с начисленными процентами на январь*	*Выплаты С февраля по июнь*	*Долг в июле*
2016			S
2017	$1{,}15S$	$1{,}15S-0{,}8S=0{,}35S$	$0{,}8S$
2018	$0{,}8S\cdot 1{,}15=0{,}92S$	$0{,}92S-0{,}5S=0{,}42S$	$0{,}5S$
2019	$0{,}5S\cdot 1{,}15=0{,}575S$	$0{,}575S-0{,}1S=0{,}475S$	$0{,}1S$
2020	$0{,}1S\cdot 1{,}15=0{,}115S$	$0{,}115S$	0

Общая сумма выплат $0{,}35S+0{,}42S+0{,}475S+0{,}115S=1{,}36S$.
По условию она должна быть меньше 50 млн рублей. Составим неравенство

$$1{,}36S<50,\quad S<36{,}7647...$$

Значит, наибольшее целое значение $S=36$. *Ответ: 36 млн.*

№17. **В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.**
а) Доказать, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.



Решение:
а) Центр вписанной окружности точка $O-$ это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому

$$\angle ABO=\angle OBC=\frac{\angle ABC}{2}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ.$$

Окружность касается сторон треугольника AC и AB в точках M и N соответственно, следовательно, $OM=ON=r$ и $OM\perp AC$, $ON\perp AB$.
В прямоугольном треугольнике BON $BO=2ON=2r$, поскольку $\angle NBO=30^\circ$.
В треугольнике BMO из неравенства треугольника имеем $BM\le BO+OM$, $BM\le 2r+r$, $BM\le 3r$.
б) В треугольнике BMO по теореме косинусов $BO^2=BM^2+OM^2-2\cdot BM\cdot OM\cdot\cos\angle OMB$.

$$(2r)^2=(2{,}8r)^2+r^2-2\cdot 2{,}8r\cdot r\cdot\cos\angle OMB,\quad \cos\angle OMB=\frac{121}{140}.$$

$$\angle OMC=90^\circ,\ \angle OMB+\angle BMC=90^\circ,\ \angle OMB=90^\circ-\angle BMC,\ \cos\angle OMB=\cos\left(90^\circ-\angle BMC\right)=\sin\angle BMC$$

$$\sin\angle BMC=\frac{121}{140}.$$

Ответ: б) $\frac{121}{140}$.

№18. **Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[4;8]$.**

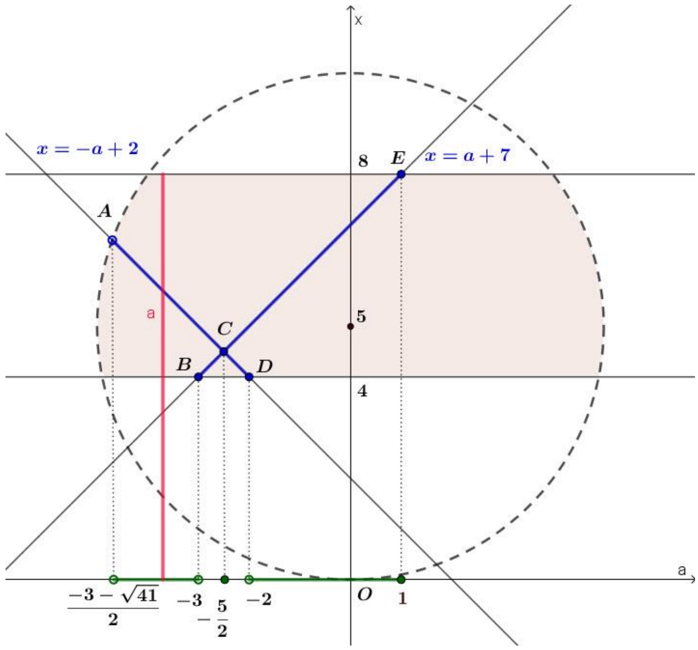
Решение:

<u>I способ</u>

ОДЗ:

$$10x-x^2-a^2>0$$
$$x^2-10x+a^2<0$$
$$x^2-10x+25+a^2<25$$
$$a^2+(x-5)^2<5^2$$

В системе координат $(a;x)$ эта область - круг с центром в точке $(0;5)$ и радиусом 5.



$$(x-a-7)(x+a-2)=0$$
$$x=a+7 \quad x=-a+2$$

Найдем абсциссы точек пересечения.

$A:\begin{cases}x=-a+2\\ a^2+(x-5)^2=5^2\end{cases}$ $a<0,\ a=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}$,

$B:\begin{cases}x=a+7\\ x=4\end{cases}$ $a=-3$,

$C:\begin{cases}x=a+7\\ x=-a+2\end{cases}$ $a=-\dfrac{5}{2}$

$D:\begin{cases}x=-a+2\\ x=4\end{cases}$ $a=-2$, $E:\begin{cases}x=a+7\\ x=8\end{cases}$ $a=1$.

При $a\le\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}$ решений нет; при $\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3$ один корень; при $-3\le a<-\dfrac{5}{2}$ два корня; при $a=-\dfrac{5}{2}$ один корень; при $-\dfrac{5}{2}<a\le-2$ два корня; при $-2<a\le1$ один корень; при $a>1$ нет корней.

Исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[4;8]$ при

$$a\in\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right)\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup(-2;1].$$

<u>II способ.</u>

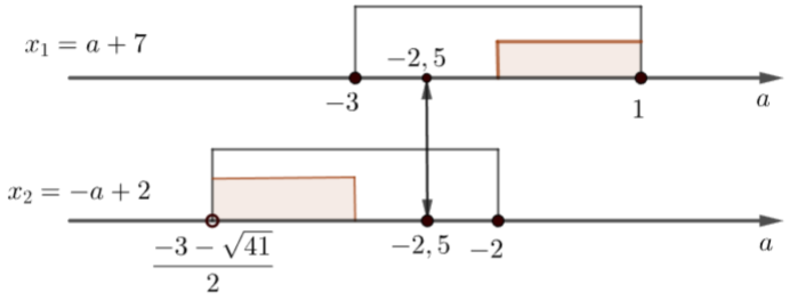
$\dfrac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=a+7\\ x_2=-a+2\end{array}\right.\\ 10x-x^2-a^2>0\end{cases}$ имеет единственный корень на отрезке $4\le x\le 8$.

1) Подставим $x_1=a+7$ в неравенство $10x-x^2-a^2>0$ и получим $10(a+7)-(a+7)^2-a^2>0,\quad 2a^2+4a-21<0,\quad -2-\sqrt{46}<a<-2+\sqrt{46}$. Учтем условие, что $4\le x\le 8$, тогда $4\le a+7\le 8,\quad -3\le a\le 1$. Значит, корень $x_1=a+7$ существует при $a\in[-3;1]$.

2) Подставим $x_2=-a+2$ в неравенство $10x-x^2-a^2>0$ и получим

$10(-a+2)-(-a+2)^2-a^2>0$, $a^2+3a-8<0$, $\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{41}}{2}$. Учтем условие, что $4\le x\le 8$, тогда $4\le -a+2\le 8$, $-6\le a\le -2$. Значит, корень $x_2=-a+2$ существует при $a\in\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-2\right]$.

Совпадение корней: $x_1=x_2$, $a+7=-a+2$, $a=-2{,}5$.



Уравнение имеет единственный корень на заданном отрезке при $a\in\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right)\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup(-2;1]$.

Ответ: $a\in\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};-3\right)\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup(-2;1]$.

№19. В продуктовом магазине есть весы с двумя чашами. На одну чашу весов кладут только продукты, на другую - гири. На чашу для гирь можно положить несколько гирь. Магазину разрешено продавать только целое число килограммов продуктов.

а) Можно ли некоторым набором из пяти гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?

б) Можно ли некоторым набором из четырех гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?

в) Найдите наибольшее значение n такое, что любой вес от 1 до n килограммов можно отвесить каким-нибудь набором из 5 гирь.

Решение:

а) Да, например, подойдет набор 1, 2, 3, 7, 14. В самом деле, $4=3+1$, $5=3+2$, $6=3+2+1$. Поэтому можно получить любой вес от 0 до 6. Добавляя к ним 7, 14 или $21=7+14$ получим также веса от 7 до 13, от 14 до 20, от 21 до 27.

б) Нет. Заметим, что есть всего 16 способов выбрать какие-то гири из четырех (включая «не брать ничего»). Действительно, каждую гирю можно либо взять, либо не взять, это дает два варианта для каждой гири, а всего $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ вариантов. Поэтому можно получить не более 15 различных суммарных весов, а нужно 25.

в) Рассуждения, аналогичные пункту б), показывают, что пять гирь дадут не более 31 различной суммы. Если взять гири 1, 2, 4, 8, 16, то как раз получится суммы от 1 до 31. (это станет очевидным, если записать числа от 1 до $31=2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$ в двоичной системе счисления, и выбирать гири, соответствующие нужным степеням двойки).

Ответ: а) да, б) нет, в) 31.