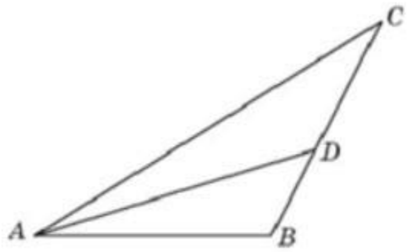
Досрочный ЕГЭ по математике Профильный уровень

11 класс 27.03.2026

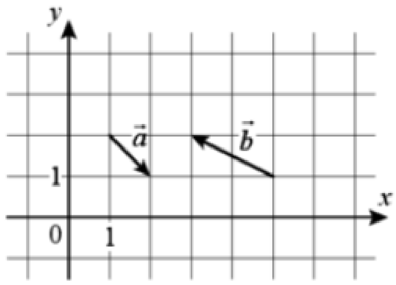
Примерный вариант

Часть 1

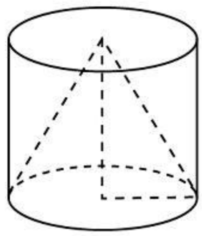
№1. В треугольнике ABC угол C равен 30°, AD – биссектриса, угол BAD равен 22°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.



№2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{2a} - \vec{b}$.



№3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 150. Найдите объём конуса.



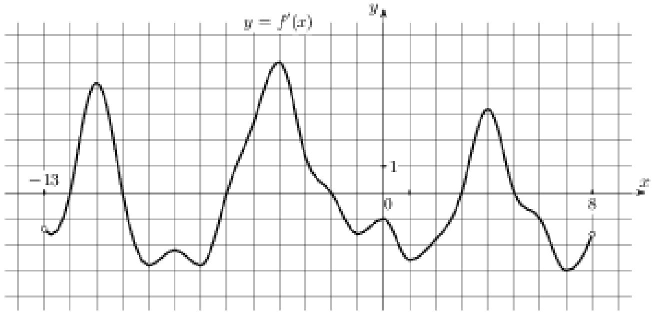
№4. Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

№5. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

№6. Найдите корень уравнения $\sqrt{15-2x} = 3$.

№7. Найдите tgx, если $\cos x = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

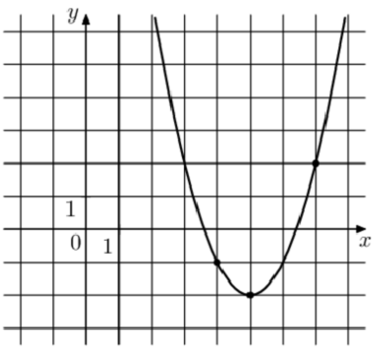
№8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13;9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;6]$.



№9. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot K^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{228} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $1,5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

№10. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№11. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(1)$.



№12. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\cos^2 x+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;6\pi\right]$.

№14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.

№15. Решите неравенство $\frac{4}{\log_2 x}-\log_2\left(\frac{4}{x}\right)\le\frac{38}{\log_2 x^2}$.

№16. В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 6,6 млн рублей.
Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным 6,6 млн рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 12,6 млн рублей.

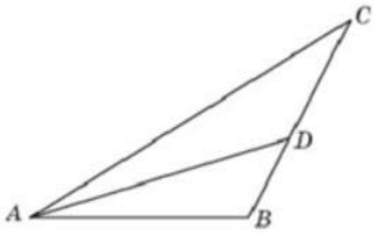
№17. В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.
а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC=\frac{7}{25}$.

№18. Найти все значения а, при каждом из которых система $\begin{cases}2^{|x|+3}+7\cdot|x|+1=8y+7x^2+a\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет единственное решение.

№19. Восемь различных натуральных числе таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.
а) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 65?
б) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 62?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех восьми чисел?

Решение. ***Часть 1***

№1. **В треугольнике ABC угол C равен 30°, AD – биссектриса, угол BAD равен 22°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.**



Решение:

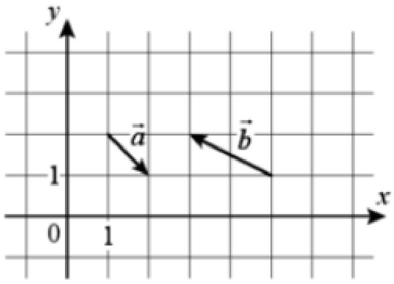
Поскольку AD – биссектриса, то $\angle DAC = \angle BAD = 22^\circ$.

$\angle ADB$ – внешний угол $\triangle ADC$, поэтому

$\angle ADB = \angle DAC + \angle C = 22^\circ + 30^\circ = 52^\circ$.

Ответ: 52.

№2. **На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{2a-b}$.**



Решение:

1) $\vec{a}\{2-1;1-2\} = \vec{a}\{1;-1\}$,

$\vec{b}\{3-5;2-1\} = \vec{b}\{-2;1\}$,

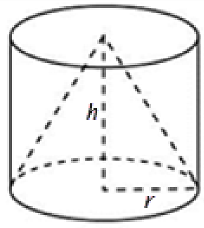
2) $2\vec{a}-\vec{b} = 2\cdot\{1;-1\} - \{-2;1\} = \{2;-2\} - \{-2;1\} =$

$= \{4;-3\}$

3) $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$

Ответ: 5.

№3. **Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 150. Найдите объём конуса.**



Решение:

$V_{конуса} = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$ и $V_ц = S_{осн}\cdot h$, $150 = S_{осн}\cdot h$, $50 = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$,

$V_к = 50$.

Ответ: 50.

№4. **Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.**

Решение:

Событие A – новый принтер прослужит меньше двух лет, но больше года, $P(A) = ?$ искомая вероятность.

Событие B – принтер прослужит больше двух лет, $P(B) = 0{,}83$. События A и B несовместны.

Событие $A\cup B$ – принтер прослужит больше года, $P(A\cup B) = 0{,}98$.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$, $0{,}98 = P(A) + 0{,}83$, $P(A) = 0{,}15$.

Ответ: 0,15.

№5. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение:

Всего фломастеров $10 \text{ синих} + 9 \text{ красных} + 6 \text{ зеленых} = 25$.

Вероятность достать первым синий фломастер равна $\frac{10}{25}$. Тогда останется фломастеров 24, и вероятность достать вторым красный равна $\frac{9}{24}$. Выбрать фломастеры в таком порядке - события независимые, поэтому их вероятности перемножаем: $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24}$. Возможно, что первым достанем красный фломастер. Вероятность этого события равна $\frac{9}{25}$. Тогда вероятность события «вторым достать синий фломастер» равна $\frac{10}{24}$. Вероятность выбрать фломастеры в таком порядке равна $\frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24}$. События "выбрали сначала синий, а затем красный фломастеры" или "выбрали сначала красный, а затем синий фломастеры" - несовместны, значит, их вероятности складываем: $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

№6. Найдите корень уравнения $\sqrt{15-2x} = 3$.

Решение: $\sqrt{15-2x} = 3,\ \ 15-2x = 9,\ \ 2x = 15-9,\ \ 2x = 6,\ \ \underline{x=3}$.

Ответ: 3.

№7. Найдите tgx**, если** $\cos x = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$ **и** $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

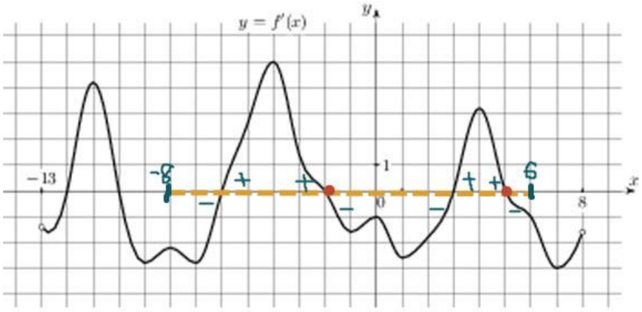
$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ III четв. } \sin\alpha < 0$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{25}{26}} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

2) $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}\right) = \frac{1}{5} = 0,2$

Ответ: 0,2.

№8. **На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13;9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;6]$.**



Решение:

В точках, где $f'(x_0) = 0$ и проходя через них, производная меняет свой знак с «+» на «-«, будут максимумы функции. Таких точек на отрезке $[-8;6]$ две.

Ответ: 2.

№9. **Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \dfrac{Вт}{м^2 \cdot K^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{228} \cdot 10^{20}$ м², а мощность её излучения равна $1{,}5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.**

Решение:

$$1{,}5625 \cdot 10^{25} = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{228} \cdot 10^{20} \cdot T^4$$

$$T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{5{,}7 \cdot 10^{12}}, \quad T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{57 \cdot 10^{11}}, \quad T^4 = 15625 \cdot 10^{10} \cdot 4,$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^{10}, \quad T^4 = 5^4 \cdot 10^{12}, \quad T = 5 \cdot 10^3 = 5000$$

Ответ: 5000.

№10. **Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?**

Сплав	Всего (кг)	Процентное содержание никеля в сплаве	Масса никеля в сплаве (кг)
I	x	10%	$0{,}1x$
II	y	35%	$0{,}35y$
I+II	150	30%	$0{,}3 \cdot 150 = 45$

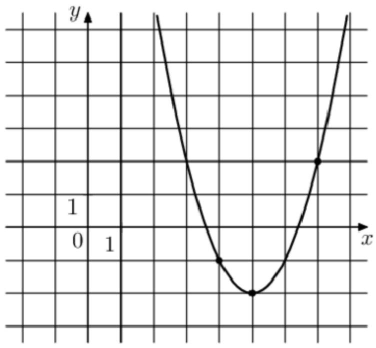
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 0{,}1x + 0{,}35y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 120 \end{cases}$$

На $120 - 30 = 90$ (кг) масса первого сплава меньше массы второго.

Ответ: 90.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(1)$.**



Решение:

1) $(5;-2)$ $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, $5 = -\dfrac{b}{2a}$, $b = -10a$

2) $(4;-1)$ $(5;-2)$

$$\begin{cases} -1 = 16a + 4b + c \\ -2 = 25a + 5b + c; \\ b = -10a \end{cases} \quad \begin{cases} 16a + 4b + c = -1 \\ 9a + b = -1 \\ b = -10a \end{cases} ; \quad \begin{cases} 16a - 40a + c = -1 \\ 9a - 10a = -1 \\ b = -10a \end{cases}$$

$a = 1;\ \ b = -10;\ \ c = 23$

$f(x) = x^2 - 10x + 23,\ \ f(1) = 1 - 10 + 23 = 14$

Ответ: 14.

№12. **Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.**

Решение:

1) $D(y) = (0;\infty)$

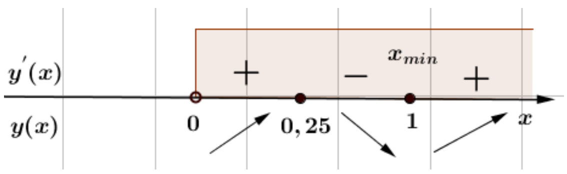
$$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x}$$

$$y' = \frac{4(x-1)(x-0,25)}{x}$$

2) $y' = 0$, $x = 1$ $\quad x = 0,25$

3)



$x_{\min} = 1$

Ответ: 1.

№13. **а) Решите уравнение** $\cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

Решение:

а) $\cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 x + \frac{1 - \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\cdot\sin 2x = 0,\quad \cos^2 x - \frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 0,$$

$$\cos x(\cos x - \sin x) = 0,$$

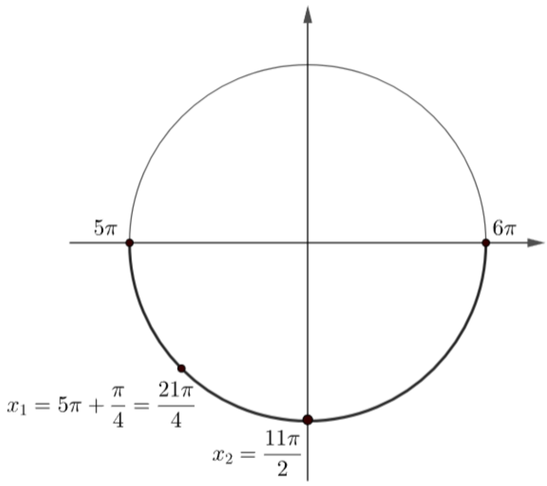
$\cos x - \sin x = 0$ $\qquad$ $\cos x = 0$

$tgx = 1$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

$$x_1 = \frac{21\pi}{4},\ x_2 = \frac{11\pi}{2}$$

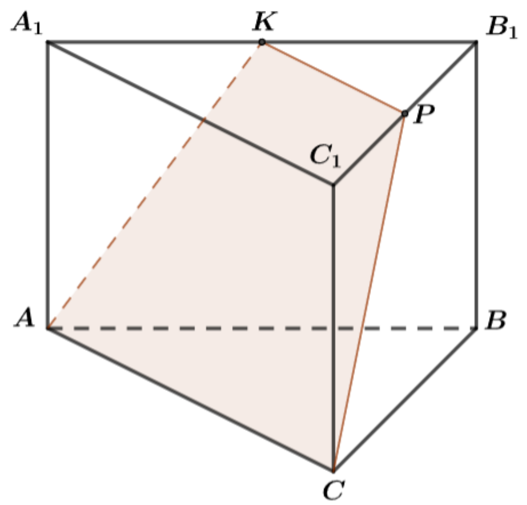


Ответ: *а)* $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$; *б)* $\frac{21\pi}{4};\ \frac{11\pi}{2}$.

№14. **В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.**

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

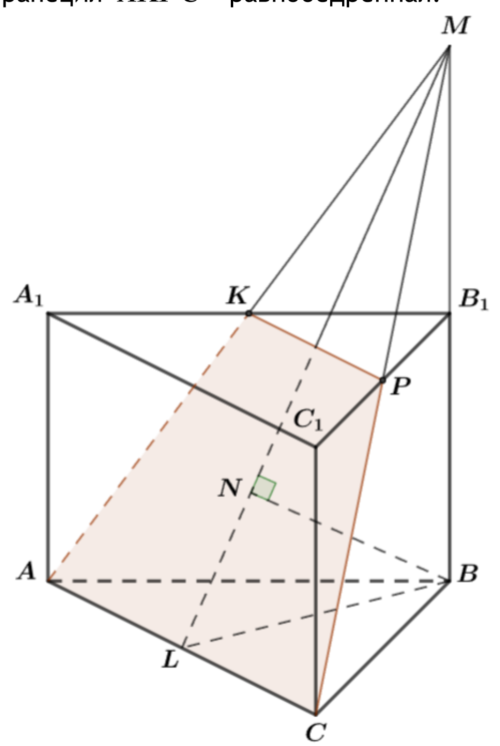
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.



Решение:

а) Точки A и K принадлежат грани ABB_1A_1, а точки A и C – грани ABC. Тогда секущая плоскость пересекает эти грани по прямым AK и AC. Основания призмы ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в параллельных плоскостях и плоскость α пересекает их по параллельным прямым. Пусть $\alpha \cap A_1B_1C_1 = KP$, где $P \in B_1C_1$. Значит, $KP \| AC$ и, поскольку $AC \| A_1C_1$, то $KP \| A_1C_1$. В треугольнике $A_1B_1C_1$ K – середина A_1C_1, тогда по теореме Фалеса P – середина B_1C_1. $KP = \dfrac{A_1C_1}{2} = \dfrac{AC}{2}$ как средняя линия $A_1B_1C_1$, тогда $KP \neq AC$. Получившееся сечение - трапеция $AKPC$.

Прямоугольные треугольники AA_1K и CC_1P равны по двум катетам ($AA_1 = CC_1$ как боковые ребра призмы и $A_1K = \dfrac{A_1B_1}{2} = \dfrac{B_1C_1}{2} = PC_1$ так как $\triangle A_1B_1C_1$ – равносторонний). Следовательно, $AK = CP$ и трапеция $AKPC$ – равнобедренная.



б) $CP \cap BB_1 = M$, $AK \cap BB_1 = M$, следовательно, плоскость α пересекает продолжение ребра BB_1 в точке M.

$B_1M \perp A_1B_1C_1$ и проведем $BL \perp AC$, следовательно, $ML \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах. Получили, что $AC \perp MLB$. В этой плоскости проведем $BN \perp ML$, тогда $AC \perp BN$. Поскольку отрезок BN перпендикулярен двум пересекающимся прямым AC и ML, принадлежащим плоскости α, то $BN \perp \alpha$, тогда BN – искомое расстояние.

В прямоугольном треугольнике MLB $BN = \dfrac{BL \cdot BM}{ML}$.

В равностороннем треугольнике ABC

$$BL = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$\triangle BMC \sim B_1MP$ (прямоугольные треугольники с общим острым углом), следовательно, $\dfrac{BC}{PB_1} = \dfrac{MB}{MB_1}$, $\dfrac{2}{1} = \dfrac{MB}{MB_1}$.

Значит, $MB_1 = BB_1 = 6$.

$$BN = \frac{BL \cdot BM}{\sqrt{BL^2 + BM^2}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot(6+6)}{\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 12^2}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 12}{3\sqrt{19}} = \frac{12\sqrt{57}}{19}$$

Ответ: б) $\dfrac{12\sqrt{57}}{19}$.

№15. **Решите неравенство** $\dfrac{4}{\log_2 x}-\log_2\left(\dfrac{4}{x}\right)\le\dfrac{38}{\log_2 x^2}$.

Решение:

$$\frac{4}{\log_2 x}-\left(\log_2 4-\log_2 x\right)\le\frac{38}{2\log_2 x}$$

$$t=\log_2 x,\quad \frac{4}{t}-2+t\le\frac{19}{t},\quad \frac{4-2t+t^2}{t}-\frac{19}{t}\le 0,$$

$$\frac{t^2-2t-15}{t}\le 0,\quad \frac{(t-5)(t+3)}{t}\le 0,$$

$$\frac{\left(\log_2 x-\log_2 32\right)\left(\log_2 x-\log_2\frac{1}{8}\right)}{\log_2 x-\log_2 1}\le 0,\quad \begin{cases}\dfrac{(x-32)\left(x-\frac{1}{8}\right)}{x-1}\le 0,\\ x>0\end{cases}\quad x\in\left(0;\ \frac{1}{8}\right]\cup(1;32]$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right]\cup(1;32]$.

№16. **В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 6,6 млн рублей. Условия его возврата таковы:**

- **каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;**
- **с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;**
- **в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным 6,6 млн рублей;**
- **выплаты в 2030 и 2031 годах равны;**
- **к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.**

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 12,6 млн рублей.

Решение: Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$ коэффициент наращения, $X-$выплата в 2030 и 2031 годах.

Год	*Долг с начисленными процентами на январь*	*Выплаты с февраля по июнь*	*Долг в июле*
2026			$6,6$
2027	$6,6\cdot k$	$6,6k-6,6=6,6(k-1)$	$6,6$
2028	$6,6\cdot k$	$6,6k-6,6=6,6(k-1)$	$6,6$
2029	$6,6\cdot k$	$6,6k-6,6=6,6(k-1)$	$6,6$
2030	$6,6\cdot k$	X	$6,6\cdot k-X$
2031	$(6,6\cdot k-X)\cdot k$	X	$(6,6\cdot k-X)\cdot k-X=0$

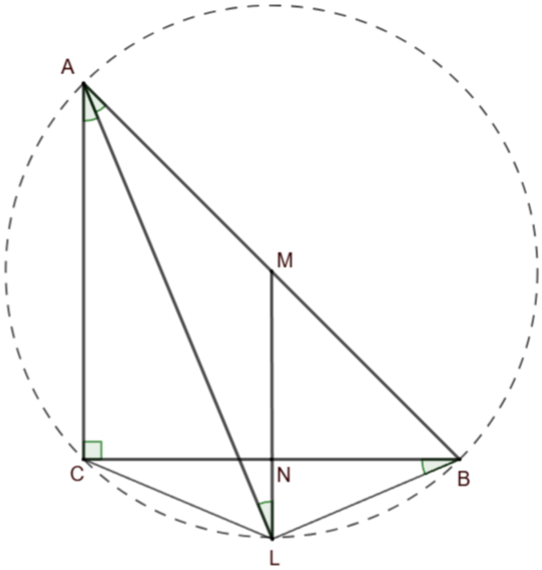
По условию сумма всех выплат равна 12,6 млн рублей, тогда получим уравнение $3\cdot 6,6(k-1)+2X=12,6$ и $X=16,2-9,9k$. Из уравнения $(6,6\cdot k-X)\cdot k-X=0$ выразим $X=\dfrac{6,6k^2}{k+1}$.

$$\frac{6,6k^2}{k+1}=16,2-9,9k,\quad 55k^2-21k-54=0,\quad D=21^2+4\cdot 55\cdot 54=9(49+1320)=9\cdot 37^2=111^2,$$

$$k=\frac{21\pm 111}{2\cdot 55}\quad (k>0),\quad k=1,2.\qquad k=1+\frac{r}{100},\quad 1,2=1+\frac{r}{100},\quad r=20$$

Ответ: 20.

№17. **В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.**
а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC=\dfrac{7}{25}$.



Решение:
а) Поскольку M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно, то MN – средняя линия, поэтому $MN \parallel AC$ и $MN=\dfrac{AC}{2}$.
$AC\perp BC$, следовательно, $MN\perp BC$.
$\angle CAL=\angle MLA$ как накрест лежащие при $MN\parallel AC$ и секущей AL. AL – биссектриса $\angle CAB$, поэтому $\angle CAL=\angle LAB$. Получили, что $\angle MLA=\angle LAB$, тогда $\triangle AML$ – равнобедренный и $AM=ML$.
M – середина гипотенузы AB, значит, она является центром описанной окружности около $\triangle ABC$ с радиусом, равным AM. Значит, точка L принадлежит этой окружности, поскольку $AM=ML$.

Так как вписанные углы $\angle CAL=\angle LAB$, то хорды $BL=CL$. Значит, треугольник BLC – равнобедренный. $\angle LAB=\angle LCB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу BL. Значит, в равнобедренных треугольниках AML и BLC углы при основаниях равны и, следовательно, они подобны по двум углам.

б) В прямоугольном треугольнике ABC $\cos\angle BAC=\dfrac{7}{25}$, значит, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{7}{25}$. Пусть $AC=7x,\ AB=25x$, тогда $BC=24x$.

$MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{7x}{2}=3{,}5x$. $ML=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{25x}{2}=12{,}5x$. $NL=ML-MN=12{,}5x-3{,}5x=9x$.

В равнобедренном треугольнике BCL LN – медиана и высота, проведенная к основанию BC, значит, $BN=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{24x}{2}=12x$. Тогда в прямоугольном треугольнике BNL

$BL=\sqrt{BN^2+NL^2}=\sqrt{(9x)^2+(12x)^2}=15x$.

Поскольку треугольники AML и BLC подобны, то $\dfrac{S_{AML}}{S_{BLC}}=k^2$, где k – коэффициент подобия этих треугольников, равный $\dfrac{AM}{BL}=k,\ \dfrac{12{,}5x}{15x}=k,\ k=\dfrac{25}{30},\ k=\dfrac{5}{6}$. Тогда $\dfrac{S_{AML}}{S_{BLC}}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{36}$.

Ответ: б) $\dfrac{24}{36}$.

№18. Найти все значения а, при каждом из которых система $\begin{cases} 2^{|x|+3}+7\cdot|x|+1=8y+7x^2+a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение:
Заметим, что второе уравнение системы задает окружность, которая симметрична оси ординат. При этом данная окружность имеет радиус 1, следовательно, она определена при $x\in[-1;\ 1]$.

При замене $x\to -x$ система не меняет свой вид, поэтому, если $(x_0;y_0)$ – решение, то $(-x_0;y_0)$ также является решением системы уравнений. Значит, если система имеет единственной решение, то это решение вида $(0;y)$. Подставим эту пару в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} y^2=1 \\ a=5y-12 \end{cases}, \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ a=5y-12 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1 \\ a=-7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=-1 \\ a=-17 \end{cases}.$$

Проверим сколько действительно имеет решений система уравнений при $a=-7$ и $a=-17$.
Подставим $a=-17$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, значит, $|x|=x$. Получим:

$$5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+17,\ \ 5\cdot 2^x+6x=5y+6x^2+10.$$

Заметим, что при $x=1$ $y=0$ и эта точка $(1;\ 0)$ лежит на окружности. Следовательно, решением системы также будет являться точка $(-1;\ 0)$. Значит, при $a=-17$ система имеет более одного решения.
Подставим $a=-7$ в первое уравнение. Пусть $x\in(0;1]$, значит, $|x|=x$. Получим:

$$5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+7,\ \ \ y=2^x+\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2.$$

При $x\in(0;1]$ оценим значение y: $0<x\le 1$, $2^0<2^x\le 2^1$, $1<2^x\le 2$ и $\frac{6}{6}x>\frac{6}{5}x^2$, $\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2>0$. Значит, $y=2^x+\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2>1$. Тогда у графика первого уравнения есть единственная точка пересечения с окружностью - это точка $(0;\ 1)$. Следовательно, при $a=-7$ система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: -7.

№19. **Восемь различных натуральных числе таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.**
а) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 65?
б) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 62?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех восьми чисел?

Решение:
а) Да, может, например, если среди 8 чисел будет 1, а остальные 7 чисел будут простыми:

$$1+2+3+5+7+11+13+23=65.$$

б) Заметим, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число. Если оно есть, то остальные 7 чисел нечетны. В этом случае сумма всех 8 чисел будет нечетна. Противоречие. Значит, четного числа нет. Тогда все 8 чисел нечетны. Рассмотрим сумму 8 наименьших нечетных чисел:

$$1+3+5+7+9+11+13+15=64>62.$$

Значит, сумма 8 различных натуральных чисел, не имеющих общего делителя, больше 1, не может быть равна 62.
в) Мы уже знаем, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере из 8 нечетных чисел мы можем заменить наибольшее нечетное

число на 2 и получить сумму меньше. Если же четное число есть, и оно больше 2, то мы можем заменить его на 2 и получить сумму меньше.
Среди данных чисел может быть максимум одно число, кратное 3. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере мы можем заменить наибольшее нечетное число на 3 и получить сумму меньше. Если же число, кратное 3, есть, и оно больше 3, то мы может заменить его на 3 и получить сумму меньше.
Пусть наименьшее значение достигается в наборе чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 .$$

Тогда $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$.

Далее $a_4 \geq 5$, так как четные числа брать в набор уже нельзя. Аналогично $a_5 \geq 7$.

Далее $a_6 \geq 11,\ a_7 \geq 13,\ a_8 \geq 17$, так как в набор нельзя брать четные числа и числа, кратные 3, то есть 8, 9, 10, 12, 14, 15 и 16. Тогда наименьшая сумма достигается в наборе из чисел 1, 2, 3, 7, 13, 17 и равна

$$1+2+3+5+7+11+13+17=59 .$$

Ответ: а) да, б) нет, в) 59.