

Сфера, шар и различные комбинации фигур

■ Примеры

- №1. Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 12 друг от друга, пересекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 64π .
- Докажите, что эти плоскости равноудалены от центра шара.
 - Найдите площадь поверхности шара.
-
- №2. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π .
- Точка H — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка H делит проходящий через нее диаметр большей окружности в отношении 1:7.
 - Найдите площадь поверхности шара.
-
- №3. В конусе с вершиной S на окружности основания отмечены точки M и K так, что хорда MK перпендикулярна диаметру AB . Длины дуг, на которые точки M и K делят окружность относятся как 1:5.
- Докажите, что объемы пирамид $SMKA$ и $SMKB$ относятся как $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.
 - Найдите площадь сечения конуса плоскостью SMK , если радиус основания конуса равен 10, а длина образующей равна 13.
-
- №4. Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.
- Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости цилиндра под углом 60° .
 - Найдите длину той части отрезка BD , которая находится внутри цилиндра, если образующая равна $\sqrt{6}$.
-
- №5. В правильной треугольной пирамиде стороны основания равны 12, а боковые ребра равны 13. Около пирамиды описана сфера.
- Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.
 - Найдите расстояние от центра сферы до плоскости основания.
-
- №6. Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .
- Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
 - Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.
-
- №7. В конус вписана треугольная пирамида $PABC$ так, что ее вершина P совпадает с вершиной конуса, а вершины треугольника ABC лежат на окружности основания конуса. Отрезок BC пересекает диаметр основания конуса, проходящий через точку A , и делит его точкой пересечения пополам.
- Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
 - Найдите объем конуса, если $AC=6$, $AB=8$, а расстояние от центра основания конуса до боковых ребер пирамиды $PABC$ равно $\frac{60}{13}$.

- №8. Грань $ABCD$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1 B_1 C_1$ является круг, вписанный в четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$.
- а) Высота конуса равна h , ребро куба равно a . Докажите, что $3a < h < 3,5a$.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и $SA_1 D$, где S – вершина конуса.

■ **Ответы (примеры)** Сфера, шар и различные комбинации

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
400π	100π	60	3,2	$73/22$	$\sqrt{10}\pi$	100π	$\arctg(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$

■ **Тест** Сфера, шар и различные комбинации

- №1. Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 8 друг от друга, пересекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 9π .
- а) Докажите, что эти плоскости равноудалены от центра шара.
- б) Найдите площадь поверхности шара.
-
- №2. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны 18π и 24π .
- а) Точка H – ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка H делит проходящий через нее диаметр большей окружности в отношении 1:7.
- б) Найдите площадь сферы.
-
- №3. В конусе с вершиной S на окружности основания отмечены точки M и K так, что хорда MK перпендикулярна диаметру AB . Длины дуг, на которые точки M и K делят окружность относятся как 1:2.
- а) Докажите, что отношение объемов большей из пирамид $SMKA$ и $SMKB$ к объему меньшей равно 3.
- б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью SMK , если радиус основания конуса равен $6\sqrt{3}$, а длина образующей равна 41.
-
- №4. Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB – диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.
- а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости цилиндра под углом 60° .
- б) Найдите длину той части отрезка BD , которая находится внутри цилиндра, если образующая равна $3\sqrt{2}$.
-
- №5. В правильной треугольной пирамиде стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 2. Около пирамиды описана сфера.
- а) Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.
- б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости основания.
-
- №6. Вокруг единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре $B_1 C_1$ взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 75° с плоскостью ABC .
- а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
- б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

- №7. В конус вписана треугольная пирамида $PABC$ так, что ее вершина P совпадает с вершиной конуса, а вершины треугольника ABC лежат на окружности основания конуса. Отрезок BC пересекает диаметр основания конуса, проходящий через точку A , и делит его точкой пересечения пополам.
- а) Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.
- б) Найдите объем пирамиды $PABC$, если радиус основания конуса равен 10, $AC=16$, а расстояние от центра основания конуса до боковых ребер пирамиды $PABC$ равно 6.

- №8. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1 B_1 C_1$ является круг, вписанный в четырехугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$: $AB=a$, $AA_1=\sqrt{2}a$
- а) Высота конуса равна h . Докажите, что $4,5a < h < 5a$.
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и SD_1C , где S – вершина конуса.

■ Ответы (тест)

Сфера, шар и различные комбинации

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
100π	900π	360	$\frac{16\sqrt{3}}{5}$	1	$\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$	240	$\arctg(2\sqrt{6}+2\sqrt{3})$