

Четырехугольная призма. Расстояния

■ Примеры

- №1. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .
- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .
-
- №2. Точки E и K являются соответственно серединами ребер AB и BC куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 6. Через точки E и K проведена плоскость α , пересекающая ребра $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ в точках M и N соответственно, при этом $EM = 2\sqrt{10}$. Плоскость α пересекает луч BB_1 в точке L .
- Докажите, что $LB_1 : B_1 B = 1 : 2$.
 - Найдите расстояние от вершины B до плоскости α .
-
- №3. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причем $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .
-
- №4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K .
- Докажите, что K – середина CC_1 .
 - Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.
-
- №5. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Известно, что $AA_1 : AB : AD = 2 : 3 : \sqrt{13}$. На ребре AA_1 отметили точку M , что прямые OM и BD_1 перпендикулярны.
- Докажите, что точка M – середина ребра AA_1 .
 - Найдите расстояние от точки M до прямой $B_1 D_1$, если $AB = 3$, $BD = 5$.
-
- №6. Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- Докажите, что AMB_1 параллельна прямой $A_1 C$.
 - Найдите расстояние между прямой $A_1 C$ и плоскостью AMB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AB = 8$, $AD = 8$ и $AA_1 = 4$.
-
- №7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и AD выбраны точки K , M , N соответственно так, что $A_1 K : KB_1 = C_1 M : MB_1 = DN : NA = 1 : 2$.
- Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости KMN .
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости KMN , если ребро куба равно 5.

- №8. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K – середина ребра $B_1 C_1$. Плоскость α проходит через точки B , K и D .
- а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α , если ребро куба равно 3.

▪ **Ответы (примеры)** Четырехугольная призма. Расстояния

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
$\frac{12\sqrt{26}}{13}$	$\frac{9\sqrt{19}}{19}$	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$	$\frac{24\sqrt{41}}{41}$	$\frac{\sqrt{559}}{10}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{9}$	1

■ **Тест** Четырехугольная призма. Расстояния

№1. Точки E и K являются соответственно серединами ребер AB и BC куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 10. Через точки E и K проведена плоскость α , пересекающая ребра $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ в точках M и N соответственно, при этом $EM = \sqrt{109}$. Плоскость α пересекает луч BB_1 в точке L .

а) Докажите, что $LB_1 : B_1 B = 2 : 3$.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости α .

№2. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Известно, что $AA_1 : AB : AD = 1 : 2 : \sqrt{5}$. На ребре AA_1 отметили точку M , что прямые OM и BD_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что точка M – середина ребра AA_1 .

б) Найдите расстояние от точки M до прямой $B_1 D_1$, если $AB = 2$, $BD = 3$.

№3. Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что AMB_1 параллельна прямой $A_1 C$.

б) Найдите расстояние между прямой $A_1 C$ и плоскостью AMB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AB = 12$, $AD = 12$ и $AA_1 = 6$.

№4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и AD выбраны точки K , M , N соответственно так, что $A_1 K : KB_1 = C_1 M : MB_1 = DN : NA = 1 : 2$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости KMN .

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости KMN , если ребро куба равно 6.

№5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K – середина ребра $B_1 C_1$. Плоскость α проходит через точки B , K и D .

а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α , если ребро куба равно 6.

■ **Ответы (тест)** Четырехугольная призма. Расстояния

№1	№2	№3	№4	№5
$\frac{50\sqrt{209}}{209}$	$\frac{\sqrt{89}}{6}$	4	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	2

(¹) Следствие из признака параллельности двух плоскостей

https://mathcourse.ru/lessons/21_4_1-parallelnost-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

(²) Угол между прямыми в пространстве

https://mathcourse.ru/lessons/21_3_2-ugol-mezhdu-dvumya-pryamymi-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

(³) Теорема о трех перпендикулярах (прямая и обратная)

https://mathcourse.ru/lessons/21_8_2_1-teorema-o-treh-perpendikulyarah-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (прямая теорема).
- ✓ Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции (обратная теорема).

(⁴) Признак перпендикулярности двух плоскостей

https://mathcourse.ru/lessons/21_11_2-priznak-perpendikulyarnosti-dvuh-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

(⁵) Следствие из признака перпендикулярности двух плоскостей

https://mathcourse.ru/lessons/21_11_2-priznak-perpendikulyarnosti-dvuh-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c , то любая прямая плоскости α , перпендикулярная к прямой c , перпендикулярна к плоскости β .

(⁶) Признак перпендикулярности прямой и плоскости

https://mathcourse.ru/lessons/21_7_2-priznak-perpendikulyarnosti-priamoj-i-ploskosti-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

(⁷) Признак параллельности прямой и плоскости

https://mathcourse.ru/lessons/21_2_2-priznak-parallelnosti-priamoj-i-ploskosti-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна данной плоскости.