

Пирамида. Расстояние от точки до плоскости

■ Примеры

- №1. В пирамиде $DABC$ ребра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.
а) Докажите, что пирамида правильная.
б) На ребрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .
-
- №2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ – квадрат со стороной 6, а боковое ребро равно 9. На ребре SA отмечена точка M так, что $AM = 6$.
а) Постройте перпендикуляр из точки S на плоскость BCM .
б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости BCM .
-
- №3. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку D , M – середина бокового ребра SC . Угол между прямыми AM и BC равен 60° .
а) Докажите, что $SD : CD = \sqrt{11}$.
б) Найдите расстояние от точки D до плоскости ABS , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{33}$.
-
- №4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F , так, что $SF = BE = 3$.
а) Докажите, что плоскость CFE параллельна ребру SB .
б) Плоскость CFE пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .
-
- №5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7$, $AS = 14$. На сторонах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причем $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру AS .
а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру BC .
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α .
-
- №6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота пирамиды равна 4. На ребрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причем $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.
а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .
-
- №7. Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB = 6\sqrt{21}$, $BC = 5$, $SA = 12$, $SB = 30$, $SD = 13$.
а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .
-
- №8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.
а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

- №9. На высоте SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ взяли точку M так, что $SM:MO=2:3$. Через точку M параллельно грани ADS провели плоскость α .
- а) Докажите, что расстояние от прямой BC до плоскости α относится к расстоянию между прямыми BC и AS как $4:5$.
- б) Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α , если все ребра пирамиды равны 10.
-
- №10. Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 36. Все боковые ребра пирамиды равны 30. На ребрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $BK=CN=20$. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости ABC .
- а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $2:7$.
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α .
-
- №11. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .
- а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная из точки A , делится плоскостью, проходящей через середины ребер AB , AC и SA , пополам.
- б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA=\sqrt{5}$, $AB=AC=5$, $BC=2\sqrt{5}$.
-
- №12. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины ребер AC и BC проведена плоскость α .
- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
- б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .
-
- №13. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно равны. Точки M , N и K – середины ребер BD , AC и DC соответственно. Через точку K проведена плоскость α , параллельная ребрам BD и AC .
- а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна секущей плоскости.
- б) Найдите расстояние от точки M до плоскости α , если $AC=BD=14$, $BC=AD=13$, $AB=CD=15$.
-
- №14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S – вершина, точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB .
- а) Докажите, что все точки прямой AB равноудалены от плоскости CMK .
- б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости CMK , если $SC=6$, $AB=4$.
-
- №15. Точка M симметрична вершине P правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ относительно плоскости основания $ABCD$.
- а) Докажите, что плоскости PBC и MDA параллельны.
- б) Найдите расстояние между плоскостями PBC и MDA , если сторона основания пирамиды $PABCD$ равна 2, а ее боковая сторона равна $\sqrt{10}$.

■ **Ответы** Пирамида. Расстояние от точки до плоскости

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
$\frac{5\sqrt{6}}{9}$	$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$	11	$\frac{2\sqrt{15}}{7}$	$\frac{\sqrt{210}}{3}$	$\frac{12}{\sqrt{5}}$	$\frac{12\sqrt{21}}{5}$	3,5
№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15	
$\frac{8\sqrt{6}}{3}$	$4\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{11}}{2}$	$\frac{\sqrt{23}}{2}$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	

■ **Тест** **Пирамида. Расстояние от точки до плоскости**

- №1. Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $6\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10.
 а) Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из точки K на плоскость квадрата, совпадает с центром квадрата.
 б) Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.
-
- №2. Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB=6\sqrt{12}$, $BC=5$, $SA=12$, $SB=30$, $SD=13$.
 а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .
 б) Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .
-
- №3. На высоте SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ взяли точку M так, что $SM:MO=1:4$. Через точку M параллельно грани ADS провели плоскость α .
 а) Докажите, что расстояние от прямой BC до плоскости α относится к расстоянию между прямыми BC и AS как 9:10.
 б) Найдите расстояние от прямой BC до плоскости α , если все ребра пирамиды равны 20.
-
- №4. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку D , M – середина бокового ребра SC . Угол между прямыми AM и BC равен 60° .
 а) Докажите, что $SD:CD=\sqrt{11}$.
 б) Найдите расстояние от точки D до плоскости ABS , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{33}$.
-
- №5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=3$ и диагональю $BD=5$. Все боковые ребра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=2$.
 а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
 б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .
-
- №6. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины ребер AC и BC проведена плоскость α .
 а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
 б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .
-
- №7. Точка M симметрична вершине P правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ относительно плоскости основания ABC .
 а) Докажите, что плоскости PBC и MDA параллельны.
 б) Найдите расстояние между плоскостями PBC и MDA , если сторона основания пирамиды $PABCD$ равна 6, а ее высота равна 5.

■ **Ответы (тест)** **Пирамида. Расстояние от точки до плоскости**

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
8	4,8	$6\sqrt{6}$	22	$\frac{3\sqrt{11}}{10}$	$\sqrt{6}$	$\frac{15\sqrt{34}}{17}$