

Сведение к дробно-рациональным неравенствам

■ **Примеры** Решите неравенства:

$$\text{№1.} \quad \frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$$

$$\text{№2.} \quad 1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0$$

$$\text{№3.} \quad \frac{2\log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x - \log_3 x^4} \leq 1$$

$$\text{№4.} \quad 2\log_x 0,2 + \log_5 x \leq 1$$

$$\text{№5.} \quad \log_{49}(x+4) + \log_{(x^2+8x+16)} \sqrt{7} \leq -\frac{3}{4}$$

$$\text{№6.} \quad \frac{1}{2} \log_3(x-2)^2 + 64 \cdot \log_{(x-2)^4} 3 - 8 \leq 0$$

$$\text{№7.} \quad \log_3 x + 2 \geq 9 \cdot \log_{\frac{81}{x}} 3$$

$$\text{№8.} \quad \frac{\log_{3^{x+4}} 27}{\log_{3^{x+4}}(-81x)} \leq \frac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}$$

$$\text{№9.} \quad \log_{9x}(27x) + \log_{3x^2}(9x^2) \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{№10.} \quad \frac{\log_2(2x) \cdot \log_{0,5x} 2}{\log_{0,125x} 8} \leq 1$$

$$\text{№11.} \quad \log_3 x \geq (\log_3 4 \cdot \log_3 x - \log_3^2 6) \cdot \log_{\frac{x}{9}} 3$$

$$\text{№12.} \quad \frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}$$

$$\text{№13.} \quad \frac{\log_3(27x^4) + 4\log_3 x + 12}{\log_3^2 \frac{x^2}{3} - 16} \leq -1$$

$$\text{№14.} \quad \frac{45}{(\log_2^2 x + 6\log_2 x)^2} + \frac{14}{\log_2^2 x + 6\log_2 x} + 1 \geq 0$$

$$\text{№15.} \quad \log_3 x + 4\sqrt{\log_3 x} + 4 \geq \frac{14 + 4\sqrt{\log_3 x}}{\log_3 x - 4\sqrt{\log_3 x} + 5}$$

$$\text{№16.} \quad \frac{\log_3(9x) + 2}{\log_3 x + 1} \cdot (\log_3^2 x + \log_3(27x) - 3) \leq 0$$

$$\text{№17.} \quad \frac{4}{\log_2 x} - \log_2\left(\frac{4}{x}\right) \leq \frac{38}{\log_2 x^2}$$

$$\text{№18.} \quad (\log_{36} x + 1) \cdot \left(\frac{1}{\log_{36} x} + 1 \right) \leq \log_{36} x$$

$$\text{№19.} \quad \frac{\log_2 27}{\log_2 \frac{x}{81}} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x} \right) \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 \frac{x}{27}}$$

$$\text{№20.} \quad 3^{\log_3(\log_3 x)} + \frac{3}{\log_3(3x)} \leq 3$$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1$	№2. $\frac{1}{\log_2(4x)} \geq 1 + \frac{1}{\log_2 x + 2} \left(\frac{4}{\log_2(8x)} - 2 \right)$
№3. $\log_{1/3} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$	№4. $9 \cdot \log_{(x-3)^4} 16 \leq 6 - \log_4 (x-3)^2$
№5. $\log_5 x + 1 \geq 4 \cdot \log_{\frac{125}{x}} 5$	№6. $\log_{2x^2} (4x^2) - \log_{4x} (2x) \leq \frac{3}{2}$
№7. $(\log_2 12,8 \cdot \log_2 x - 9) \cdot \log_{\frac{x}{5}} 2 \geq \log_2 x$	№8. $\frac{\log_2(8x) \cdot \log_{0,125x} 2}{\log_{0,5x} 16} \leq \frac{1}{4}$
№9. $\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2(32x)} \geq \frac{18 + \log_2 x^{16}}{\log_2^2 x - 25}$	№10. $\frac{\log_2(8x^5) + 3 \log_2 x - 8}{\log_2^2 \frac{x^2}{8} - 4} \leq -1$
№11. $\log_5 x + 3\sqrt{\log_5 x} + 2 \geq \frac{3 + 3\sqrt{\log_5 x}}{\log_5 x - 3\sqrt{\log_5 x} + 3}$	№12. $\frac{\log_2(4x)}{1 - \log_2^2(2x)} - \frac{1}{\log_2\left(\frac{x}{4}\right)} \geq 0$
№13. $5^{\log_5(\log_5 x)} + \frac{5}{\log_5(5x)} \leq 5$	

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\frac{\log_2^2 x - 4\log_2 x + 5}{\log_2 x - 2} \leq 2$	№2. $\frac{4}{\log_3 x + 1} \geq 1 + \frac{1}{\log_3(9x)} \left(1 + \frac{5}{\log_3(3x)} \right)$
№3. $4 \cdot \log_4 x + 9 \cdot \log_{\frac{x}{2}} 4 \leq 14$	№4. $\log_3 x + 49 \log_{27x} 3 \leq 11$
№5. $\log_{2x} 0,25 \geq \log_2 32x - 1$	№6. $\log_{8x} 16 \cdot \log_{0,5}^2(4x) \leq 9$
№7. $4 - \frac{1}{2} \cdot \lg(x-3)^2 + 8 \cdot \log_{(x-3)^2} \left(\frac{1}{10} \right) \geq 0$	№8. $\log_4 x + (\log_4 0,64 \cdot \log_4 x + \log_4^2 5) \log_{\frac{x}{16}} 4 \geq 0$
№9. $\frac{\log_2(32x) - 1}{\log_2^2 x - \log_2 x^5} \geq -1$	№10. $\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{x}{27}} \geq \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$
№11. $\log_2 x - 5\sqrt{\log_2 x} + 6 \geq \frac{31 - 5\sqrt{\log_2 x}}{\log_2 x + 5\sqrt{\log_2 x} + 7}$	№12. $\frac{\log_3(9x)}{1 - \log_3^2(3x)} - \frac{1}{\log_3 x} \geq 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} \leq 1$	№2. $\frac{1}{\log_5 x - 3} + \frac{1}{\log_5 \left(\frac{x}{25} \right)} \left(1 + \frac{10 - 5 \cdot \log_5 x}{\log_5 \left(\frac{x}{5} \right) - 2} \right) \geq 1$
№3. $\log_2 x - 2 \log_x 2 + 1 \geq 0$	№4. $9 \log_{\frac{16}{x}} 4 - 4 \log_4 x \leq 4$
№5. $\log_x 9 - \log_3^2(3x) \leq -2$	№6. $\log_{3x} \frac{1}{27} \cdot \log_3 27x + 9 \geq 0$
№7. $\log_2 0,5x \geq \log_{16x} 2 \cdot \log_4 16x^4$	№8. $\log_{36x^2} (216x) + \log_{6x^2} (36x^2) \leq \frac{7}{2}$
№9. $\log_2 x + 2 \log_x 2 \geq \frac{3}{\log_2^3 x}$	№10. $\frac{\log_5 \left(\frac{x^5}{125} \right) + 3 \log_5 x - 32}{\log_5^2(5x^2) - 36} \leq 1$
№11. $\frac{\log_2(16x) - 2}{\log_2 x + 1} \cdot (\log_2^2 x + \log_2(8x) - 3) \leq 0$	№12. $\frac{9}{\log_3 x} - \log_3 \left(\frac{9}{x} \right) \leq \frac{34}{\log_3 x^2}$
№13. $\frac{\log_5 8}{\log_5 \frac{x}{16}} \leq \left(1 - \frac{1}{4 - \log_2 x} \right) \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 \frac{x}{8}}$	

■ **Ответы (тест)**

Сведение к дробно-рациональным неравенствам

	Вар.1	Вар.2	Вар.3
№1.	$\left(0; \frac{1}{64}\right); \left\{\frac{1}{2}\right\}; (64; \infty)$	$(0; 4); \{8\}$	$(0; 10); \{100\}$
№2.	$\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right); \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\{1\}; \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$	$\{5\}; (25; 125)$
№3.	$(0; 1); (\sqrt{3}; 9)$	$(0; 2); \{16\}$	$\left[\frac{1}{4}; 1\right]; [2; \infty)$
№4.	$(2; 3); (3; 4); \{-5; 11\}$	$\left(0; \frac{1}{27}\right); \{81\}$	$\{2\}; (16; \infty)$
№5.	$\{5\}; (125; \infty)$	$\left(0; \frac{1}{8}\right]; \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$	$\left(0; \frac{1}{9}\right]; \left[\frac{1}{3}; 1\right]; [3; \infty)$
№6.	$\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup [1; \infty)$	$\left(0; \frac{1}{8}\right); \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2^{11}}}; 2\right]$	$\left(0; \frac{1}{3}\right); [1; \infty)$
№7.	$(0; 5); \{8\}$	$(2; 3); (3; 4); \{-97; 103\}$	$\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right]; [4; \infty)$
№8.	$\left(0; \frac{1}{2}\right]; [1; 2); (2; 8)$	$\{5\}; (16; \infty)$	$\left(0; \frac{1}{6}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[4]{216}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right); [1; \infty)$
№9.	$\left(0; \frac{1}{32}\right); \{16\}; (32; \infty)$	$(0; 1); \{4\}; (32; \infty)$	$\left[\frac{1}{2}; 1\right]; [2; \infty)$
№10.	$[1; \sqrt{2}); [2; 4\sqrt{2})$	$(0; 1); \{3\}; (27; \infty)$	$\left(0; \frac{1}{125\sqrt{5}}\right); [1; 5]; (25\sqrt{5}; \infty)$
№11.	$[1; 5] \cup [125; \infty)$	$[1; 2] \cup [2048; \infty)$	$[0,25; 0,5); (0,5; 1]$
№12.	$\left(0; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; 1\right); [2; 4)$	$\left(0; \frac{1}{9}\right); \left(\frac{1}{9}; 1\right)$	$\left(0; \frac{1}{9}\right); (1; 81]$
№13.	$(1; 625]$		$(0; 8); (8; 16)$