ЕГЭ по математике (пересдача)

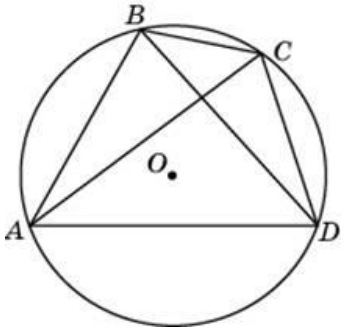
Профильный уровень

11 класс 04.07.2025

Примерный Вариант 2

Часть 1

№1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 39°, угол CAD равен 55°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Свойство углов вписанного четырехугольника

№2. Даны векторы $\vec{a}(5;-9)$, $\vec{b}(7;13)$ и $\vec{c}(-4;11)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Длина вектора

№3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ D,\ C_1,\ D_1$, где $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 378.

Нахождение объема пирамиды из многогранников

№4. Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Простые задачи на вероятность. Независимые и несовместные события

№5. В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Вероятность. Задачи повышенного уровня сложности. Объединение событий

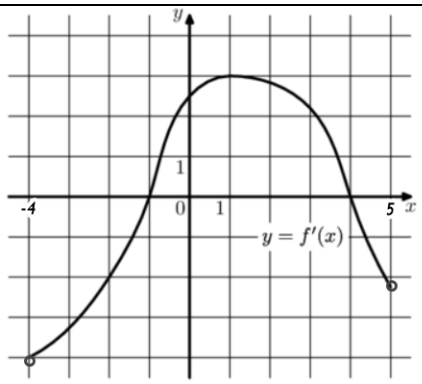
№6. Решите уравнение $(7-4x)^2=(2x+5)^2$. Если корней несколько, в ответе укажите наибольший корень.

Простейшие рациональные уравнения

№7. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$.

Преобразование выражений с радикалом

№8. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;5)$. Найдите точку минимума функции.



Исследование функций с помощью производной

№9. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 2$ моля воздуха объемом $V_1 = 18$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 9{,}15 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – постоянная, а $T = 300$ К - температура воздуха. Найдите, какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10980 Дж.

Прикладные задачи. Логарифмические уравнения и неравенства

№10. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Текстовые задачи. Концентрация вещества

№11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x$. Найдите $f(-3)$.

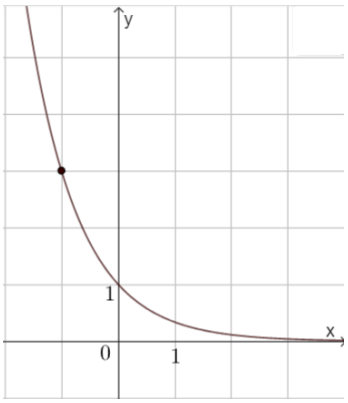


График показательной функции

№12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{121}{x} + x + 8$.

Аналитическое исследование рациональной функции

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Тригонометрические уравнения. Разложение на множители

№14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K – середины ребер AB и BC соответственно. Плоскость α проходит через точку B параллельно прямым A_1M и B_1K.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку D.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью α, если его ребра равны 2.

Прямоугольный параллелепипед. Площадь сечения

№15. Решите неравенство $\dfrac{1,5^x-3,375}{0,25^x-0,5^{x-3,5}+32}\le 0$.

Показательные неравенства, сводящиеся к дробно-рациональным

№16. Николай открывает накопительный счет на сумму 488 000 рублей. Ежегодно сумма на счету увеличивается на 25%, после чего Николай снимает некоторую сумму (одну и ту же) на протяжении 3 лет. Найдите эту сумму, если после третьего снятия на вкладе осталось 0 рублей.

Экономические задачи. Вклады

Видеокурсы. Урок 1. Вклады

№17. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. При этом $AB=6,\ BC=5,\ AC=9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP:PN$.

№18. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(6a-x)\cdot\ln(2a+2x-2)=\ln(6a-x)\cdot\ln(x-a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Логарифмическая функция в уравнениях с параметром

№19. На доске записано 30 натуральных необязательно различных чисел, каждое из которых больше 16, но не превосходит 56. Среднее арифметическое написанных чисел равно 23. Вместо каждого из чисел на доске написали число в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 9, с доски стерли.

а) Могло ли так оказаться, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 21?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся чисел оказаться больше 20, но меньше 21?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые оказались на доске.

▪ *Ответы*

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
94	*17*	*139*	*0,15*	*0,22*	*6*	*-15*	*-1*	*4,5*	*45*	*27*	*11*

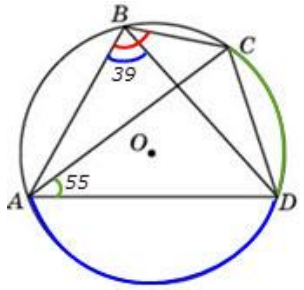
№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19
а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k$ *б)* $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{4}$	*б) 4,5*	$(-\infty;-2,5)$; $(-2,5;3]$	*250 000*	*б) 3:1*	$\left(\frac{2}{7};\frac{1}{2}\right)$	*а) да, б) нет, в) 26,5*

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

- ***Решение***

Часть 1

№1. **Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 39°, угол CAD равен 55°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.**



Решение:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}ADC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}DC = \angle ABD + \angle CAD = 39^\circ + 55^\circ = 94^\circ$$

Ответ: 94.

№2. **Даны векторы $\vec{a}(5;-9)$, $\vec{b}(7;13)$ и $\vec{c}(-4;11)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.**

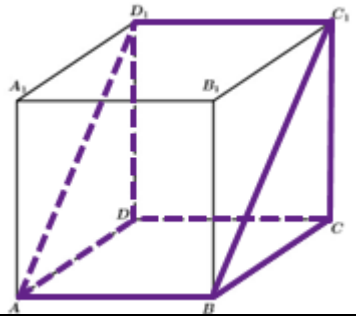
Решение:

$$\vec{a}(5;-9)+\vec{b}(7;13)+\vec{c}(-4;11)=(5+7-4;-9+13+11)=(8;15)$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{8^2+15^2}=17$$

Ответ: 17.

№3. **Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ D,\ C_1,\ D_1$, где $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 378.**



Решение:

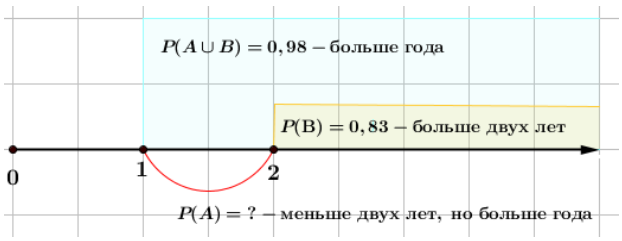
Диагональное сечение ABC_1D_1 делит прямоугольный параллелепипед на две равные часть, поэтому объем многогранника $ABCDC_1D_1$ равен половине объема прямоугольного параллелепипеда

$$V_{ABCDC_1D_1}=\frac{V_{параллелепипеда}}{2}=\frac{378}{2}=139$$

Ответ: 139.

№4. **Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.**

Решение:



Событие A – новый принтер прослужит меньше двух лет, но больше года, $P(A)=?$ искомая вероятность.

Событие B – принтер прослужит больше двух лет, $P(B)=0{,}83$. События A и B несовместны.

Событие $A\cup B$ – принтер прослужит больше года, $P(A\cup B)=0{,}98$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B),\ 0{,}98=P(A)+0{,}83,$$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

$P(A)=0{,}15$. *Ответ: 0,15.*

№5. В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение:

Всего фломастеров $11 \text{ синих} + 6 \text{ красных} + 8 \text{ зеленых} = 25$. Вероятность достать первым синий фломастер: $\frac{11}{25}$. Тогда останется фломастеров 24, и вероятность достать вторым красный: $\frac{6}{24}$.

Выбрать фломастеры в таком порядке - события независимые, поэтому их вероятности перемножаем: $\frac{11}{25}\cdot\frac{6}{24}$. Возможно, что первым достанем красный фломастер. Вероятность этого события равна $\frac{6}{25}$.

Тогда вероятность вторым достать синий фломастер, равна $\frac{11}{24}$. Вероятность выбрать фломастеры в таком порядке $\frac{6}{25}\cdot\frac{11}{24}$. События "выбрали сначала синий, а затем красный фломастеры" или "выбрали сначала красный, а затем синий фломастеры" - несовместны, значит, их вероятности складываем: $\frac{11}{25}\cdot\frac{6}{24}+\frac{6}{25}\cdot\frac{11}{24}=0{,}22$.

Ответ: 0,22.

№6. Решите уравнение $(7-4x)^2=(2x+5)^2$. Если корней несколько, в ответе укажите наибольший корень.

Решение:

$(7-4x)^2=(2x+5)^2$, $\left[\begin{array}{l}7-4x=2x+5\\7-4x=-(2x+5)\end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=6\end{array}\right.$. Наибольший корень $x=6$. *Ответ: 6.*

№7. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$.

Решение:

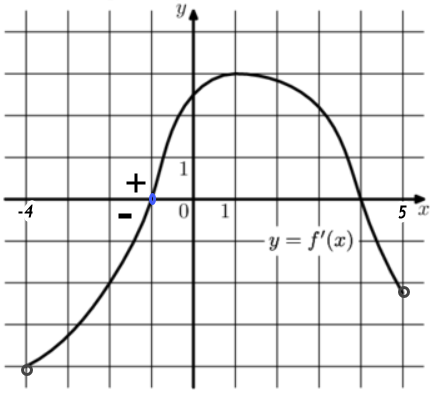
$\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}=\left(\sqrt{15}\right)^2-\sqrt{4\cdot15}\cdot\sqrt{15}=15-2\cdot15=-15$. *Ответ: -15.*

№8. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;5)$. Найдите точку минимума функции.

Решение:

В той точке графика, где производная функции равна нулю и в окрестности этой точки меняет свой знак с «минуса» на «плюс», там находится точка минимума функции - $x_{\min}=-1$.

Ответ: -1.



№9. **Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 2$ моля воздуха объемом $V_1 = 18$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 9{,}15 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – постоянная, а $T = 300$ К - температура воздуха. Найдите, какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 10980 Дж.**

Решение:

$$A = 10980, \quad \alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10980, \quad 9{,}15 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{18}{V_2} = 10980, \quad \log_2 \frac{18}{V_2} = 2, \quad \frac{18}{V_2} = 4, \quad V_2 = 4{,}5$$

Ответ: 4,5.

№10. **Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?**

Решение:

Сплав	Всего	Процентное содержание никеля в сплаве	Масса никеля в сплаве (кг)
I	x	10%	$0{,}1x$
II	y	35%	$0{,}35y$
I+II	225	25%	$0{,}25 \cdot 225 = 56{,}25$

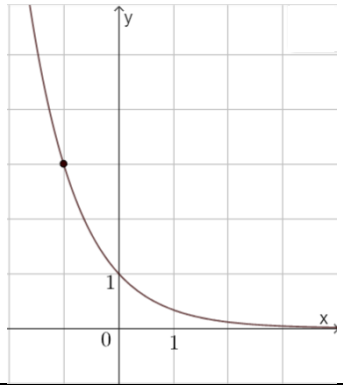
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 225 \\ 0{,}1x + 0{,}35y = 56{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 \\ y = 135 \end{cases}$$

На $135 - 90 = 45$ кг масса первого сплава меньше массы второго.

Ответ: 45.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x$. Найдите $f(-3)$.**



Решение:

$$(-1;3) \quad f(x) = a^x, \quad 3 = a^{-1}, \quad a = \frac{1}{3}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$$

Ответ: 27.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№12. **Найдите точку минимума функции** $y=\frac{121}{x}+x+8$.

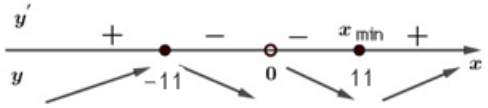
Решение:

$$y=\frac{121}{x}+x+8,\quad x\neq 0$$

$$y'=-\frac{121}{x^2}+1=\frac{-121+x^2}{x^2}=\frac{(x-11)(x+11)}{x^2}$$

$$y'=0,\quad x_1=-11,\quad x_2=11$$

$$x_{\min}=11$$



Ответ: 11.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение** $\sqrt{2}\sin^3 x-\sqrt{2}\sin x+\cos^2 x=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение:

а) $\sqrt{2}\sin^3 x-\sqrt{2}\sin x+\cos^2 x=0$

$$\sqrt{2}\sin^3 x-\sqrt{2}\sin x+1-\sin^2 x=0$$

$$\sin^2 x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)-\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$$

$$\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\left(\sin^2 x-1\right)=0$$

$$\sqrt{2}\sin x-1=0 \qquad \sin^2 x-1=0$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos^2 x=0$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$, проведем с помощью тригонометрической окружности.

$$x_1=-\frac{5\pi}{2},\ x_2=-2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4},\ x_3=-\frac{3\pi}{2},\ x_4=-\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}$$

Ответ:

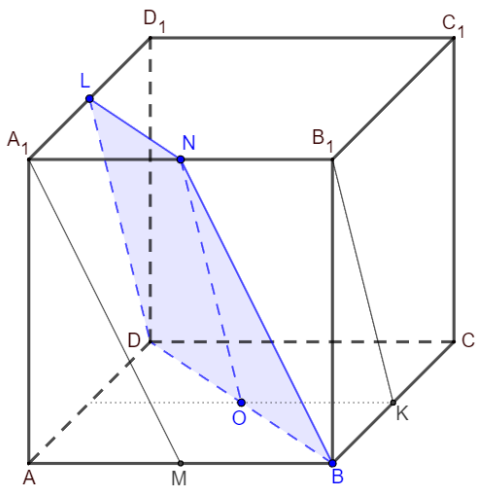
а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{4}$.

№14. **Дан куб** $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **Точки** M **и** $K-$**середины ребер** AB **и** BC **соответственно. Плоскость** α **проходит через точку** B **параллельно прямым** A_1M **и** B_1K.

а) Докажите, что плоскость α **проходит через точку** D.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью α, **если его ребра равны 2.**

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru



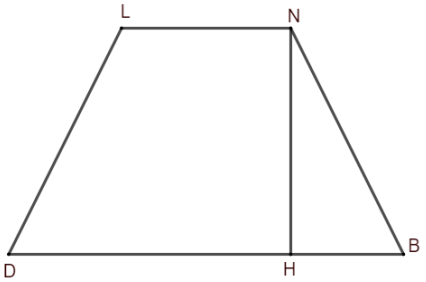
Решение:

а) Через точку B проведем прямую BN параллельно A_1M, причем $N \in A_1B_1$ и является серединой этого ребра. Пусть $O-$ центр грани $ABCD$, тогда четырехугольник ONB_1K- параллелограмм и $B_1K \parallel ON$. Пересекающиеся прямые ON и BN задают плоскость α. Она содержит отрезок BO, а значит и всю прямую на которой он лежит. Тогда прямая BD лежит в плоскости α, следовательно, точка D тоже принадлежит α.

б) Сечение куба плоскостью α есть равнобедренная трапеция $BNLD$ ($DL = BN$ из равенства прямоугольных треугольников DLD_1 и BB_1N; $LN \parallel BD$).

$NH-$ высота трапеции.

$$BD = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2},\ LN = \frac{BD}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ HB = \frac{BD - LN}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\triangle BB_1N\quad BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\triangle BHN\quad NH = \sqrt{BN^2 - HB^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{BNLD} = \frac{BD + LN}{2} \cdot NH = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Ответ: б) 4,5.

№15. Решите неравенство $\dfrac{1{,}5^x - 3{,}375}{0{,}25^x - 0{,}5^{x-3{,}5} + 32} \le 0$.

Решение:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{27}{8}}{(0{,}5)^{2x} - 0{,}5^{-3{,}5} \cdot 0{,}5^x + 32} \le 0,\quad \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^3}{(0{,}5)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3{,}5} \cdot 0{,}5^x + 32} \le 0,\quad \frac{x-3}{(0{,}5)^{2x} - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 0{,}5^x + \left(4\sqrt{2}\right)^2} \le 0,$$

$$\frac{x-3}{\left(0{,}5^x - 4\sqrt{2}\right)^2} \le 0,\quad \frac{x-3}{\left(2^{-x} - 2^{2{,}5}\right)^2} \le 0,\quad \frac{x-3}{(-x-2{,}5)^2} \le 0,\quad \frac{x-3}{(x+2{,}5)^2} \le 0$$

Ответ: $(-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; 3]$.

№16. Николай открывает накопительный счет на сумму 488 000 рублей. Ежегодно сумма на счету увеличивается на 25%, после чего Николай снимает некоторую сумму (одну и ту же) на протяжении 3 лет. Найдите эту сумму, если после третьего снятия на вкладе осталось 0 рублей.

Решение:

Пусть $S = 488000$ рублей сумма, которую вкладывают в банк, $A-$сумма, которую снимают ежегодно на протяжении 3 лет.

Год	*Размер вклада до начисления %*	*Размер вклада после начисления %*	*Размер вклада после снятия суммы* A

1	S	$1{,}25S=\frac{5}{4}S$	$\frac{5}{4}S-A$
2	$\frac{5}{4}S-A$	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}$	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A$
3	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A$	$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}$	$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0$

$$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0,\ \left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot S-\frac{5}{4}A-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0,\ \left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot S-\frac{45}{16}A-A=0,$$

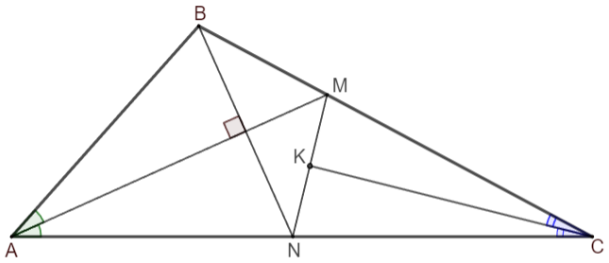
$$\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot S=\frac{61}{16}A,\ A=\frac{16\cdot 5^3\cdot 488000}{61\cdot 4^3}=\frac{125\cdot 8000}{4}=250000$$

Ответ: 250 000.

№17. **В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. При этом $AB=6,\ BC=5,\ AC=9$.**

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

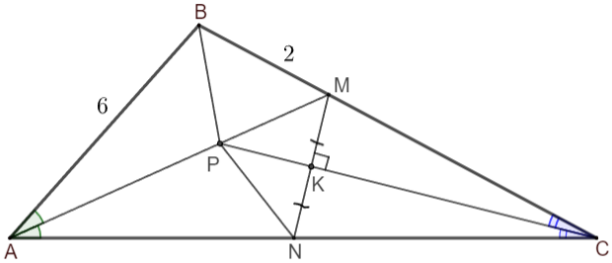
б) Пусть $P-$точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP:PN$.



Решение:

а) Треугольник ABN равнобедренный, поскольку $AM-$прямая, содержащая биссектрису и высоту, проведенную к стороне BN, тогда $AB=AN=6$. Поскольку $AC=9$, то $NC=AC-AN=9-6=3$. По свойству биссектрисы внутреннего угла $\triangle ABC$ имеем отношение $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC},\ \frac{6}{9}=\frac{BM}{5-BM},\ BM=2$.

Тогда $MC=BC-BM=5-2=3$. Получили, что треугольник $MNC-$равнобедренный, $MC=NC$ и биссектриса CK, проведенная к основанию MN, также является медианой. Значит, биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.



б) $\triangle PMN-$равнобедренный, поскольку $PK-$медиана и высота, проведенная к стороне MN, значит, $PN=PM$.

В $\triangle ABM$ $BP-$биссектриса, тогда $\frac{AP}{PM}=\frac{AB}{BM},\ \frac{AP}{PM}=\frac{6}{2},\ \frac{AP}{PM}=\frac{3}{1}$, следовательно, $AP:PN=3:1$.

Ответ: б) 3:1.

№18. **Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(6a-x)\cdot\ln(2a+2x-2)=\ln(6a-x)\cdot\ln(x-a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.**

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

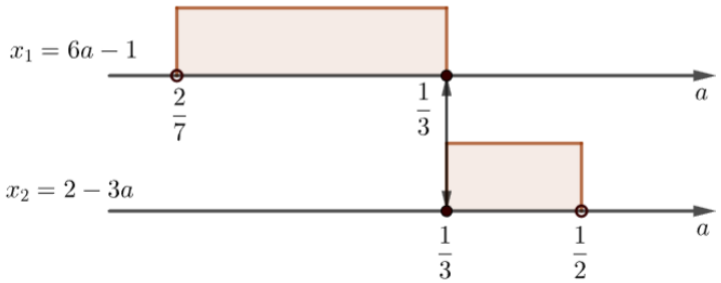
$$\ln(6a-x)\cdot\ln(2a+2x-2)-\ln(6a-x)\cdot\ln(x-a)=0$$
$$\ln(6a-x)\left(\ln(2a+2x-2)-\ln(x-a)\right)=0$$
$$(1)\ \begin{cases}\ln(6a-x)=0\\2a+2x-2>0\end{cases}\quad\text{или}\quad(2)\ \begin{cases}\ln(2a+2x-2)-\ln(x-a)=0\\6a-x>0\end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases}6a-x=1\\a+x-1>0\end{cases},\ \begin{cases}x=6a-1\\x>1-a\\0\le x\le 1\end{cases},\ \begin{cases}x=6a-1\\6a-1>1-a,\\0\le 6a-1\le 1\end{cases}\ \begin{cases}x=6a-1\\a>\dfrac{2}{7}\\\dfrac{1}{6}\le a\le\dfrac{1}{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_1=6a-1\\\dfrac{2}{7}<a\le\dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

$$(2)\ \begin{cases}\ln(2a+2x-2)-\ln(x-a)=0\\6a-x>0\end{cases},\ \begin{cases}\ln(2a+2x-2)=\ln(x-a)\\x>a\end{cases},\ \begin{cases}2a+2x-2=x-a\\x-a>0\\x<6a\\0\le x\le 1\end{cases},\ \begin{cases}x=2-3a\\x>a\\x<6a\\0\le x\le 1\end{cases},$$

$$\begin{cases}x=2-3a\\2-3a>a\\2-3a<6a\\0\le 2-3a\le 1\end{cases},\ \begin{cases}x=2-3a\\a<\dfrac{1}{2}\\a>\dfrac{2}{9}\\\dfrac{1}{3}\le a\le\dfrac{2}{3}\end{cases},\ \begin{cases}x_3=2-3a\\\dfrac{1}{3}\le a<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Совпадение корней: $x_1=x_2,\ 6a-1=2-3a,\ a=\dfrac{1}{3}$.



Единственное решение исходного уравнения на отрезке $[0;\ 1]$ при $a\in\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{1}{2}\right)$.

№19. На доске записано 30 натуральных необязательно различных чисел, каждое из которых больше 16, но не превосходит 56. Среднее арифметическое написанных чисел равно 23. Вместо каждого из чисел на доске написали число в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 9, с доски стерли.
а) Могло ли так оказаться, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 21?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся чисел оказаться больше 20, но меньше 21?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые оказались на доске.

Решение:

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

По условию на доске записаны числа $16<\{a_1,...,a_{i,}...,a_{30}\}\le 56$. Среднее арифметическое этих чисел $\frac{a_1+...+a_{30}}{30}=23,\ a_1+...+a_{30}=690$. Вместо каждого из чисел на доске записали число в два раза меньше первоначального, тогда получили последовательность: $\frac{a_1}{2},...,\frac{a_i}{2},...,\frac{a_{30}}{2}$. Числа, которые после этого оказались меньше 9, с доски стерли. Значит, если $\frac{a_i}{2}<9$, то $a_i<18$, но поскольку все исходные числа больше 16, то стертые – это число 17.

а) Пусть чисел «17» было x штук, все остальные числа равны a. Тогда после деления на 2 стерли с доски x чисел, остались только числа $\frac{a}{2}$ и их среднее арифметическое равно $\frac{a}{2}$. По условию среднее арифметическое оставшихся чисел больше 21, тогда $\frac{a}{2}>21,\ a>42$.

Составим уравнение по среднему арифметическому исходных чисел:

$$\frac{17\cdot x+(30-x)\cdot a}{30}=23,\ 17\cdot x+(30-x)\cdot a=690,\ x=\frac{690-30a}{17-a},\ x=\frac{30(a-23)}{a-17}.$$

Поскольку $x\in\mathbb{N}$, то при $a-17=30,\ a=47$ и $x=\frac{30\cdot(47-23)}{30}=24\in\mathbb{N}$. Получили подходящие под все условия числа, а именно: 24 числа равных 17 и $30-24=6$ натуральных чисел равных 47, которые больше 16 и не превосходят 56. После деления на 2 среднее арифметическое станет равным $24>21$.

б) Пусть чисел «17» изначально было x, других чисел $(30-x)$, а сумма чисел без «17» равна S, тогда $\frac{17x+S}{30}=23,\ S=690-17x$. После того как каждое из чисел поделили на 2, то стерли с доски x чисел, осталось $(30-x)$ чисел, сумма которых стала $\frac{S}{2}$. Тогда по условию их среднее арифметическое

$$20<\frac{S/2}{30-x}<21,\ 20<\frac{S}{2(30-x)}<21,\ 20<\frac{690-17x}{60-2x}<21.$$

$$\begin{cases}20<\frac{690-17x}{60-2x}\\ \frac{690-17x}{60-2x}<21\end{cases},\ \begin{cases}\frac{23x-510}{x-30}<0\\ \frac{25x-570}{x-30}>0\end{cases},\ \begin{cases}22\frac{4}{23}<x<30\\ 22\frac{4}{5}<x \text{ и } x>30\end{cases},\ x\in\left(22\frac{4}{23};22\frac{4}{5}\right).$$ Но $x\in\mathbb{N}$, значит, такое невозможно.

в) По условию максимальное число, которое может быть записано на доске – это 56. Поэтому, если изначально чисел «17» на доске было записано x, то максимальная сумма оставшихся чисел из «56» будет равна $(30-x)\cdot 56$. Если среди них есть другие числа, меньшие 56, то справедливо неравенство

$$S\le(30-x)\cdot 56=1680-56x,\ 690-17x\le 1680-56x,\ 39x\le 990,\ x\le 25\frac{15}{39},\ (x\in\mathbb{N})\ x_{наиб}=25$$

После того как стерли числа «17» их среднее арифметическое стало равным $\frac{690-17x}{60-2x}=8{,}5+\frac{180}{60-2x}$. И наибольшее значение этого выражения достигается при $x=25$: $\frac{690-17\cdot 25}{60-2\cdot 25}=26{,}5$.

$$17\cdot x+(30-x)\cdot a=690,\ a=\frac{690-17x}{30-x}=\frac{690-17\cdot 25}{30-25}=\frac{265}{5}=53$$

Пример: 25 чисел «17» и 5 чисел «53». Их среднее арифметическое $\frac{17\cdot 25+53\cdot 5}{30}=23$, что

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

удовлетворяет условию. После деления на 2 получаем среднее арифметическое $\frac{\frac{53}{2}\cdot 5}{5}=\frac{53}{2}=26{,}5$

Ответ: а) да, б) нет, в) 26,5.