ЕГЭ по математике (пересдача)

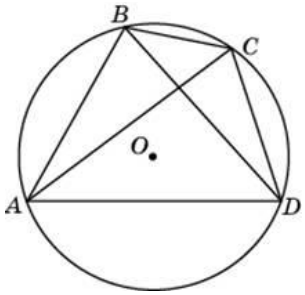
Профильный уровень

11 класс 04.07.2025

Примерный Вариант 1

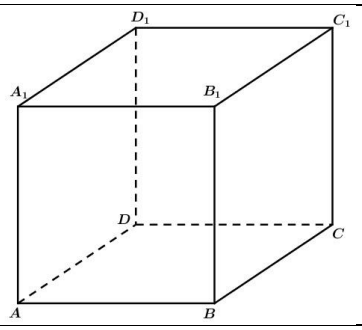
Часть 1

№1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



№2. Даны векторы $\vec{a}(1;-3)$ и $\vec{b}(-4;2)$. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

№3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ B_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=9,\ AD=4,\ AA_1=10$.



№4. Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.

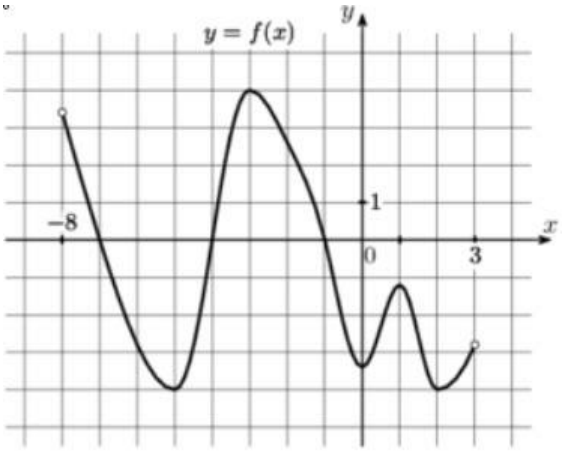
№5. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

№6. Решите уравнение $\sqrt{3-2x}=2x+3$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№7. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.

№8. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Найдите решение уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-7;-4]$.

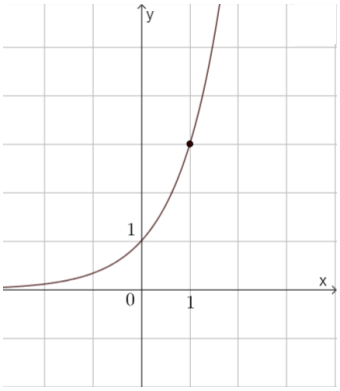
МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru



№9. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 268,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№10. Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 60 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 19% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

№11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x$. Найдите $f(3)$.



№12. Найдите точку максимума функции $y = \frac{16}{x} + x + 3$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка N лежит на ребре CD. Известно, что $CN=2ND$, $AB=3AA_1$, $AD=2AA_1$. Плоскостью α проходит через точки A, C_1 и N.

а) Докажите, что α делит ребро A_1B_1 в отношении $2:1$, считая от вершины A_1.

б) Найдите площадь сечения плоскостью α, если известно, что $AA_1=1$.

№15. Решите неравенство $\dfrac{0{,}125^x-64}{16^x-4^{x+1}+4}\le 0$.

№16. 1 июля 2026 года планируется открыть вклад в банке га 3 года. 30 июня каждого года сумма на счете увеличивается на 25% по сравнению с суммой, находящейся на вкладе 29 июня. 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают 312 500 рублей. Найдите исходную сумму вклада, если после третьего снятия осталось 0 рублей.

№17. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его сторону BC в точке K и его описанную окружность в точке M.

а) Докажите, что треугольник $BMC-$ равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC, если $AB=8$, $BC=7$ и $AC=6$.

№18. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 2]$.

№19. На доске записано 20 натуральных необязательно различных чисел, каждое из которых не превосходит 50. Одно или несколько чисел на доске увеличили на 1. Числа, которые после этого оказались равны 51, с доски стерли.

а) Могло ли среднее арифметическое всех чисел на доске уменьшиться?

б) Могло ли быть так, что сначала среднее арифметическое было равно 24, а потом стало равно 17?

в) Чему может быть равно наименьшее среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, если изначально оно было равно 24?

▪ *Ответы*

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
53	*-10*	*60*	*0,12*	*0,3*	*-0,5*	*2*	*-5*	*8,4*	*10*	*27*	*-4*

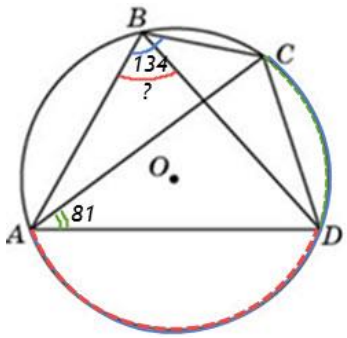
№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19
а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ *б)* $-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{6}$	*б)* $\sqrt{21}$	$[-2;\ 0{,}5)$; $(0{,}5;\ \infty)$	*610 000*	*б)* $\frac{8}{\sqrt{15}}$	$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$; $\left[\frac{13}{4};3{,}5\right)$	*а) да, б) нет, в)* $\frac{30}{11}$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

- ***Решение***

Часть 1

№1. **Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 134°, угол CAD равен 81°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.**



Решение:

1) $ADC = 2\cdot\angle ABC = 2\cdot 134^\circ = 268^\circ$

$CD = 2\cdot\angle CAD = 2\cdot 81^\circ = 162^\circ$

2) $AD = ADC - CD = 268^\circ - 162^\circ = 106^\circ$

$\angle ABD = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{106^\circ}{2} = 53^\circ$

Ответ: 53.

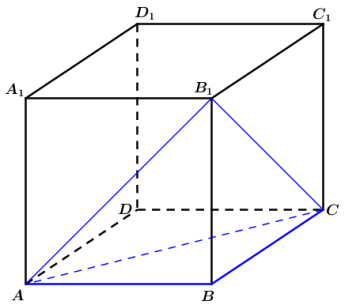
№2. **Даны векторы $\vec{a}(1;-3)$ и $\vec{b}(-4;2)$. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.**

Решение:

$\vec{a}(1;-3)\cdot\vec{b}(-4;2) = 1\cdot(-4) + (-3)\cdot 2 = -10$

Ответ: -10.

№3. **Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ B_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9,\ AD = 4,\ AA_1 = 10$.**



Решение:

Многогранник с вершинами A, B, C, B_1 является тетраэдром,

поэтому $V_{ABCB_1} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot BB_1 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\cdot 10 = 60$.

Ответ: 60.

№4. **Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.**

Решение:

$P(>7) = P(>8) + P(=8)$

$0{,}88 = 0{,}76 + P(=8)$

$P(=8) = 0{,}12$

Ответ: 0,12.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№5. **В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?**

Решение:

Всего фломастеров $10 \text{ синих} + 9 \text{ красных} + 6 \text{ зеленых} = 25$.

Вероятность достать первым синий фломастер равна $\frac{10}{25}$. Тогда останется фломастеров 24, и вероятность достать вторым красный равна $\frac{9}{24}$. Выбрать фломастеры в таком порядке - события независимые, поэтому их вероятности перемножаем: $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}$. Возможно, что первым достанем красный фломастер. Вероятность этого события равна $\frac{9}{25}$. Тогда вероятность события «вторым достать синий фломастер» равна $\frac{10}{24}$. Вероятность выбрать фломастеры в таком порядке равна $\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{24}$. События "выбрали сначала синий, а затем красный фломастеры" или "выбрали сначала красный, а затем синий фломастеры" - несовместны, значит, их вероятности складываем: $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}+\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{24}=0,3$.

Ответ: 0,3.

№6. **Решите уравнение $\sqrt{3-2x}=2x+3$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.**

Решение:

$$\sqrt{3-2x}=2x+3,\quad \begin{cases}3-2x=(2x+3)^2\\ 2x+3\ge 0\end{cases},\quad \begin{cases}2x^2+7x+6=0\\ x\ge -1,5\end{cases},\quad \begin{cases}x=-3;\ \ x=-0,5\\ x\ge -1,5\end{cases},\quad x=-0,5$$

Ответ: -0,5.

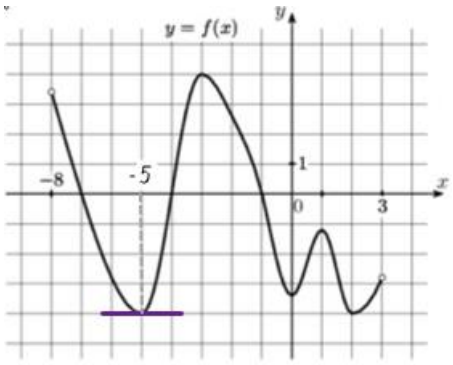
№7. **Найдите значение выражения $\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.**

Решение:

$$\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{2^2\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{4\cdot 7}{14}=2.$$

Ответ: 2.

№8. **На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Найдите решение уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-7;-4]$.**



Решение:

Производная функции равна нулю, а значит и угловой коэффициент касательной равен нулю, в точках, в касательная параллельна оси абсцисс. На отрезке $[-7;-4]$ такая точка с абсциссой $x_0=-5$.

Ответ: -5.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№9. **Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 268,8 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.**

Решение:

$$p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4},\ \ 1\cdot 268,8^{1,4} = 128\cdot V_2^{1,4},\ \ \left(\frac{268,8}{V_2}\right)^{1,4} = 128,$$

$$\left(\frac{268,8}{V_2}\right)^{\frac{7}{5}} = 2^7 \ \Big|\uparrow^{\frac{5}{7}},\ \ \frac{268,8}{V_2} = 2^5,\ \ V_2 = \frac{268,8}{32},\ \ V_2 = 8,4\,.$$

Ответ: 8,4.

№10. **Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 60 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 19% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?**

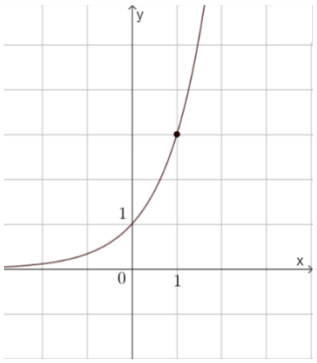
Решение:

Раствор	Всего (кг)	% содержание кислоты в растворе	Масса кислоты в растворе (кг)
I	100	$x\%$	$\frac{x}{100}\cdot 100 = x$
II	60	$y\%$	$\frac{y}{100}\cdot 60 = 0,6y$
Смешали 1-й раз	160	19%	$0,19\cdot 160 = 30,4$
I	m	$x\%$	$\frac{x}{100}\cdot m = \frac{xm}{100}$
II	m	$y\%$	$\frac{y}{100}\cdot m = \frac{ym}{100}$
Смешали 2-й раз	$2m$	22%	$0,22\cdot 2m = 0,44m$

Составим систему уравнений $\begin{cases} x + 0,6y = 30,4 \\ \frac{xm}{100} + \frac{ym}{100} = 0,44m \end{cases}$, $\begin{cases} x = 30,4 - 0,6y \\ x + y = 44 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 10 \\ y = 34 \end{cases}$.

Ответ: 10.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x$. Найдите $f(3)$.**



Решение:

$(1;3)\ \ f(x) = a^x,\ \ 3 = a^1,\ \ a = 3,\ \ f(x) = 3^x$

$f(3) = 3^3 = 27$

Ответ: 27.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№12. **Найдите точку максимума функции** $y=\frac{16}{x}+x+3$.

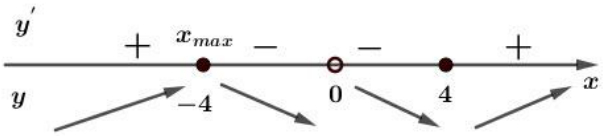
Решение:

$$y=\frac{16}{x}+x+3,\ \ x\neq 0$$

$$y'=-\frac{16}{x^2}+1=\frac{-16+x^2}{x^2}=\frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$$

$$y'=0,\ \ x_1=-4,\ \ x_2=4$$

$$x_{\max}=-4$$



Ответ: -4.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение** $4\cos^3 x+3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;-\pi]$.

Решение:

а) $4\cos^3 x-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

$$4\cos^3 x-3\cos x=0$$

$$\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)=0$$

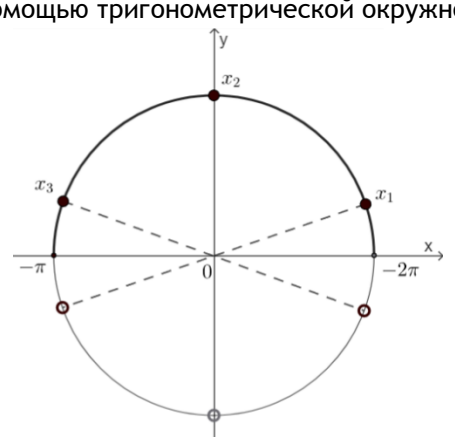
$$4\cos^2 x-3=0 \qquad \cos x=0$$

$$\cos^2 x=\frac{3}{4} \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi;-\pi]$, проведем с помощью тригонометрической окружности.



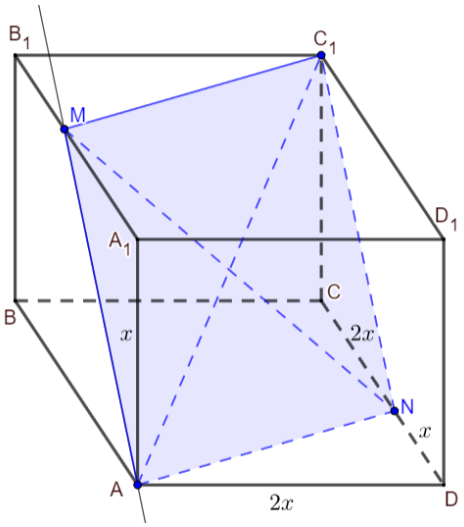
$$x_1=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6},\ \ x_2=-2\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2},\ \ x_3=-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{6}$.

№14. **В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка N лежит на ребре CD. Известно, что $CN=2ND$, $AB=3AA_1$, $AD=2AA_1$. Плоскостью α проходит через точки A, C_1 и N.**

а) Докажите, что α делит ребро A_1B_1 в отношении $2:1$, считая от вершины A_1.

б) Найдите площадь сечения плоскостью α, если известно, что $AA_1=1$.



Решение:

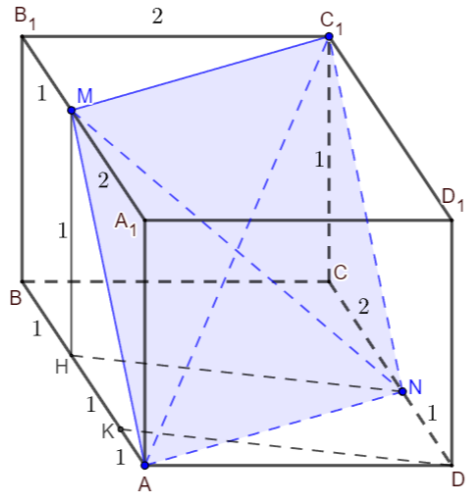
а) Плоскость α, проходящая через точки A, C_1 и N, пересекает противоположные параллельные грани параллелепипеда по параллельным прямым, тогда отрезки $C_1N \parallel AM$, где M – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1, и $AN \parallel C_1M$. Сечение параллелепипеда плоскостью α - параллелограмм ANC_1M.

Прямоугольные треугольники CC_1N и AA_1M равны по катету и острому углу ($AA_1=CC_1$ по свойству ребер параллелепипеда, $\angle A_1AM=\angle CC_1N$ как углы с сонаправленными сторонами). Следовательно, $CN=A_1M$.

Пусть $ND=x,\ CN=2x$, тогда $CD=3x$.

И, поскольку $AB=CD$, то $AB=3x$. По условию $AB=3AA_1$, значит, $3x=3AA_1$, $AA_1=x$ и $AD=2x$.

$A_1B_1=AB=3x,\ B_1M=A_1B_1-A_1M=AB-CN=3x-2x=x$, тогда $\dfrac{A_1M}{MB_1}=\dfrac{2}{1}$.



б) По условию $AA_1=1$, тогда $x=1$. Прямоугольные треугольники MB_1C_1 и NCC_1 равны по двум катетам, тогда $MC_1=NC_1$. В параллелограмме ANC_1M смежные стороны равны, значит, это - ромб. $S_{ANC_1M}=\dfrac{1}{2}AC_1\cdot MN$.

$AC_1=\sqrt{AD^2+AA_1^2+AB^2}=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Проведем $MH \parallel BB_1$ и $DK \parallel NH$. $HNDK$ – параллелограмм, тогда $ND=HK=1$ и $AK=1$, а также $NH=DK$.

В $\triangle AKD$ $DK=\sqrt{AK^2+AD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

В прямоугольном треугольнике MHN имеем

$MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$.

$S_{ANC_1M}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{21}$.

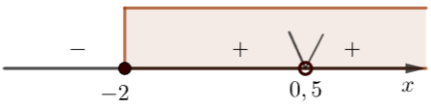
Ответ: $\sqrt{21}$

.

№15. **Решите неравенство** $\dfrac{0{,}125^x-64}{16^x-4^{x+1}+4}\le 0$.

Решение:

$$\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^x-8^2}{4^{2x}-4\cdot 4^x+4}\le 0,\quad \frac{8^{-x}-8^2}{\left(4^x-2\right)^2}\le 0,\quad \frac{-x-2}{\left(2^{2x}-2^1\right)^2}\le 0,\quad \frac{x+2}{\left(2x-1\right)^2}\ge 0$$



МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Ответ: $[-2;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ \infty)$.

№16. **1 июля 2026 года планируется открыть вклад в банке на 3 года. 30 июня каждого года сумма на счете увеличивается на 25% по сравнению с суммой, находящейся на вкладе 29 июня. 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают 312 500 рублей. Найдите исходную сумму вклада, если после третьего снятия осталось 0 рублей.**

Решение:

Пусть $S-$сумма, которую планируется вложить, $A=312500$ рублей - сумма, которую снимают.

Год	*Размер вклада на 29 июня без начисленных %*	*Размер вклада на 30 июня после начисления %*	*Размер вклада на 1 июля*
2026			S
2027	S	$1{,}25\cdot S=\frac{5}{4}S$	$\frac{5}{4}S-A$
2028	$\frac{5}{4}S-A$	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}$	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A$
2029	$\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A$	$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}$	$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0$

$$\left(\left(\frac{5}{4}S-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0,\quad \left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot S-\frac{5}{4}A-A\right)\cdot\frac{5}{4}-A=0,\quad \left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot S-\frac{45}{16}A-A=0,$$

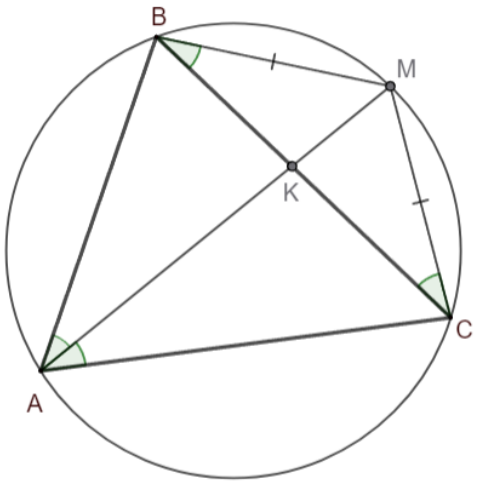
$$\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot S=\frac{61}{16}A,\quad S=\frac{61\cdot 312500\cdot 4^3}{16\cdot 5^3}=61\cdot 2500\cdot 4=610000$$

Ответ: 610 000.

№17. **Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его сторону BC в точке K и его описанную окружность в точке M.**

а) Докажите, что треугольник $BMC-$ равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMC, если $AB=8,\ BC=7$ и $AC=6$.



Решение:

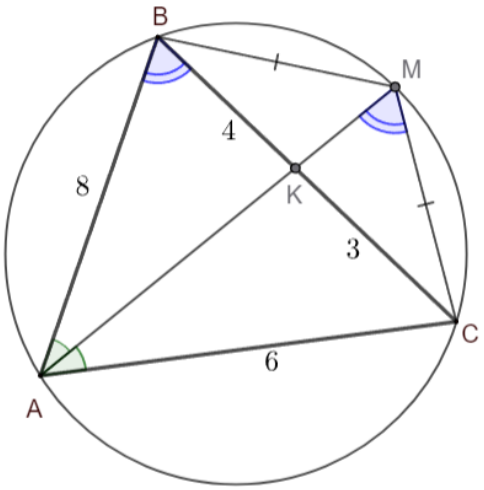
а) $\angle BAM=\angle BCM$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу BM и лежащие по одну сторону от хорды BM. Аналогично, $\angle MAC=\angle MBC$. Поскольку $AK-$биссектриса $\angle BAC$ треугольника ABC, то $\angle BAK=\angle CAK$, но точка M лежит на продолжении биссектрисы AK, поэтому $\angle BAM=\angle CAM$. Получили, что $\angle BCM=\angle MBC$ и треугольник $BMC-$ равнобедренный с основанием BC.

б) По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем $\frac{AB}{AC}=\frac{BK}{CK},\ \frac{8}{6}=\frac{x}{7-x},\ x=4,\ BK=4,\ CK=3$.

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{8^2+7^2-6^2}{2\cdot 8\cdot 7}=\frac{77}{16\cdot 7}=\frac{11}{16}.$$

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{16}.$$



В $\triangle ABC$ по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R_{ABC},\quad R_{ABC}=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{6}{2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16}}=\frac{16}{\sqrt{15}}.$$

$\angle ABC=\angle AMC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу AC и лежащие по одну сторону от хорды AC.

В $\triangle KMC$

$$\frac{KC}{\sin\angle KMC}=2R_{KMC},\quad R_{KMC}=\frac{KC}{2\sin\angle KMC}=\frac{3}{2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16}}=\frac{8}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: б) $\frac{8}{\sqrt{15}}$.

№18. **Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$.**

Решение:

$$\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

$$\begin{cases}\ln(4x-2)=0\\ x^2-4x+4a-a^2\ge 0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0\\ 4x-2>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-2=1\\ x^2-a^2-4(x+a)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ (x-a)(x+a)-4(x+a)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}\in[0;2]\\ (x-a)(x+a-4)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ \left(\frac{3}{4}-a\right)\left(\frac{3}{4}+a-4\right)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ \left(a-\frac{3}{4}\right)\left(a-\frac{13}{4}\right)\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\le a\le\frac{13}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x+4a-a^2=0\\ x>0,5\\ x\in[0;2]\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)(x+a-4)=0\\ 0,5<x\le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-a+4\\ 0,5<x\le 2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x=a\\ 0,5<x\le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-a+4\\ 0,5<-a+4\le 2\end{cases}\qquad\begin{cases}x_3=a\\ 0,5<a\le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-a+4\\ 2\le a<3,5\end{cases}$$

Совпадение корней:

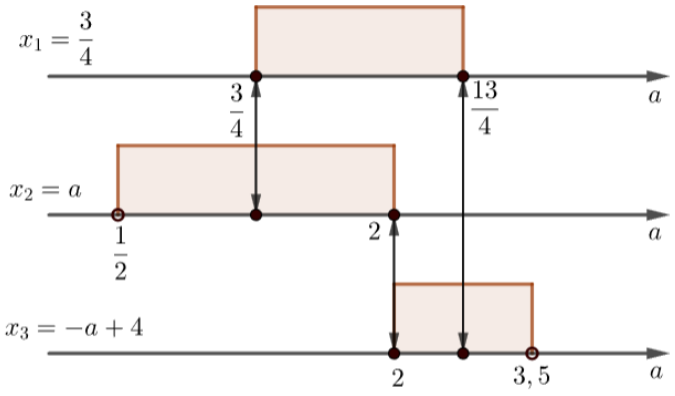
1) $x_1=x_2$, $\frac{3}{4}=a$;

2) $x_1=x_3$, $\frac{3}{4}=-a+4$, $a=\frac{13}{4}$;

3) $x_2=x_3$, $a=-a+4$, $a=2$.

Уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,2]$ при $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};3,5\right)$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru



Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right];\left[\frac{13}{4};3{,}5\right)$.

№19. На доске записано 20 натуральных необязательно различных чисел, каждое из которых не превосходит 50. Одно или несколько чисел на доске увеличили на 1. Числа, которые после этого оказались равны 51, с доски стерли.
а) Могло ли среднее арифметическое всех чисел на доске уменьшиться?
б) Могло ли быть так, что сначала среднее арифметическое было равно 24, а потом стало равно 17?
в) Чему может быть равно наименьшее среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, если изначально оно было равно 24?

Решение:

а) Пусть на доске записано восемнадцать чисел по 10 и два числа по 50, тогда их среднее арифметическое равно $\frac{18\cdot 10+2\cdot 50}{20}=\frac{180+100}{20}=\frac{280}{20}=14$. Если увеличим числа 50 на единицу, то получим два числа по 51, которые стираем с доски. Осталось восемнадцать чисел по 10 и их среднее арифметическое равно $\frac{18\cdot 10}{18}=10$. Таким образом, среднее арифметическое уменьшилось с 14 до 10.

б) Так как среднее арифметическое двадцати чисел сначала было равно 24, то их сумма равна $S_1=20\cdot 24=240$. Пусть было стерто n чисел, тогда осталось $(20-n)$ чисел. Поскольку среднее арифметическое этих чисел стало равным 17, то их сумма равна $S_2=17\cdot(20-n)=340-17n$.

Как могла меняться сумма?

Если к k числам из $(20-n)$ оставшихся прибавили по 1, то есть прибавили $1\cdot k=k$, при этом $0\le k\le 20-n$, а к числу 50 прибавили 1 и оно стало равным 51 - его стерли, то есть вычли $50n$. Тогда получили сумму $S_2=S_1-50n+k$, $340-17n=480-50n+k$, $33n-140=k$.

При $n\le 4$ получим $33n\le 33\cdot 4=132<140$, тогда $33n-140=k<0$, что противоречит условию $k\in\mathbb{N}$.

При $n\ge 5$ получим $k=33n-140\ge 33\cdot 5-140=165-140=25>20>20-n$, $k>20-n$. Противоречие, поскольку $k\le 20-n$. Следовательно, новое среднее арифметическое не могло равняться 17.

в) Пусть $n-$количество чисел, которые были увеличены на 1 и в результате стерты (то есть изначально равнялись 50, а после увеличения стали равны 51). Тогда на доске осталось $(20-n)$ чисел.

Поскольку среднее арифметическое всех 20 чисел было равно 24, то из сумма равна 480. Сумма всех стертых n чисел после увеличения на 1 равна $50n$. Минимально возможная сумма стала равной $480-50n$ (если увеличивать только те числа, которые были стерты).

Из условия, что все числа натуральные, получаем ограничение: $480-50n>0,\ n\le 9$.

Новое среднее арифметическое $S=\frac{480-50n}{20-n}=50-\frac{520}{20-n}$. При возрастании n среднее арифметическое убывает. Следовательно, минимальное среднее арифметическое достигается при максимальном значении $n=9$: $S=\frac{480-50\cdot 9}{20-9}=\frac{480-450}{11}=\frac{30}{11}$.

Пример. Пусть на доске записано 9 чисел 50, 10 чисел 1 и одно число 20. Их среднее арифметическое

равно $\frac{9\cdot 50+10\cdot 1+20}{20}=\frac{450+10+20}{20}=24$.

Увеличим на 1 все 9 чисел 50 (они становятся равными 51 и стираются). На доске останутся 10 чисел 1 и одно число 20. Среднее арифметическое чисел станет равно: $\frac{10\cdot 1+20}{11}=\frac{30}{11}$.

Ответ: а) да, б) нет, в) $\frac{30}{11}$.