# Основной ЕГЭ по математике

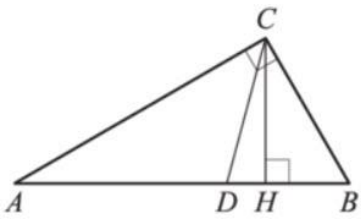
## Профильный уровень

### 11 класс 27.05.2025

### Примерный Вариант 1

#### Часть 1

№1. Острый угол $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ равен $61^\circ$. Найдите угол между высотой $CH$ и биссектрисой $CD$, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

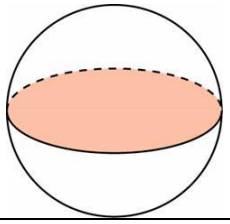



---

№2. Даны векторы $\vec{a}(0;-3)$, $\vec{b}(-2;4)$ и $\vec{c}(4;-1)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.

---

№3. Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



---

№4. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трем аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

---

№5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

---

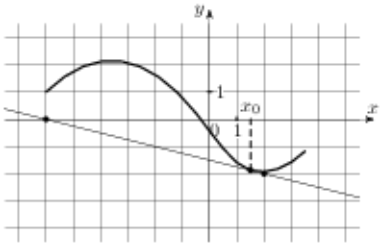
№6. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+4}=256^{x}$.

---

№7. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 14}{\log_{81} 14}$.

---

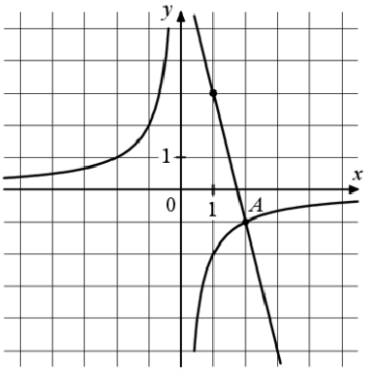
№8. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




№9. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a$ км/ч$^2$. Скорость $v$ вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где $l-$ пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч$^2$.

№10. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

№11. На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках $A$ и $B$. Найдите абсциссу точки $B$.




№12. Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-2x^2+x+3$ на отрезке $[1;4]$.

## Часть 2

№13. а) Решите уравнение $2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}-2\sin(x+\pi)$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

№14. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость $\alpha$ проходит через ребро $AB$ и пересекает ребра $SC$ и $SD$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Известно, что $AB=AN=BM=5MN$.

а) Докажите, что $SM:MC=SN:ND=1:4$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью $\alpha$ и плоскостью основания пирамиды.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№15. Решите неравенство $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{4^{x^2}-16\cdot 2^{x^2}+64}\le 0$.

---

№16. 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн. рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3 951 тыс. рублей?

---

№17. В четырехугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK=90^\circ$, $\angle NKL=\angle KLM=120^\circ$.

а) Доказать, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA=\sqrt{3}$.

---

№18. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $a\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)-49a+14=0$ имеет ровно два различных корня.

---

№19. На доске записано $k$ последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20 меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?

в) Найдите наибольшее возможное значение $k$.

## ▪ *Ответы*

| №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 | №7 | №8 | №9 | №10 | №11 | №12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *16* | *4* | *3* | *0,04* | *0,0476* | *-0,8* | *4* | *-0,25* | *6050* | *20* | *-0,25* | *3* |

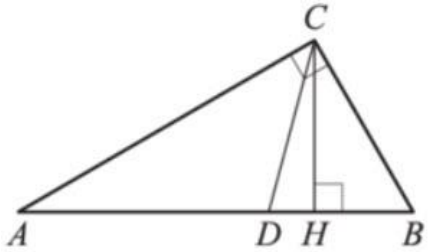
| №13 | №14б | №15 | №16 | №17б | №18 | №19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *а)* $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$ *б)* $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3}$. | $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ | $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{3};-1\right];\ \{1\}$ | *1,5* | $9-3\sqrt{3}$ | $\left\{0;\dfrac{1}{7}\right\};\ \left(\dfrac{2}{11};\dfrac{2}{3}\right)$ | *а) да, б) нет, в) 139.* |

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

- ***Решение***

## *Часть 1*

**№1.** **Острый угол $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ равен $61^\circ$. Найдите угол между высотой $CH$ и биссектрисой $CD$, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.**




*Решение:*

$\triangle BHC$ – прямоугольный треугольник с $\angle B = 61^\circ$, тогда $\angle BCH = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$.

$CD$ – биссектриса прямого угла $C$ треугольника $ABC$, значит, $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$.

$\angle DCH = \angle BCD - \angle BCH = 45^\circ - 29^\circ = 16^\circ$

*Ответ: 16.*

---

**№2.** **Даны векторы $\vec{a}(0;-3)$, $\vec{b}(-2;4)$ и $\vec{c}(4;-1)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.**

*Решение:*

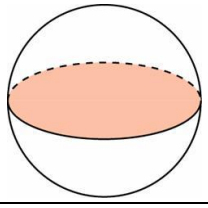
$\vec{a}(0;-3)+2\cdot\vec{b}(-2;4)+\vec{c}(4;-1)=(0+2\cdot(-2)+4;-3+2\cdot 4+(-1))=(0;4)$

$\left|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{0^2+4^2}=4$

*Ответ: 4.*

---

**№3.** **Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.**



*Решение:*

$S_{п.ш}=4\pi r^2=12,\quad \pi r^2=3$.

Радиус большого круга шара равен радиусу шара $S_{б.кр}=\pi r^2=3$.

*Ответ: 3.*

---

**№4.** **На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трем аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.**

*Решение:*

1) $120\cdot 2=240$ участников олимпиады размещены в первых двух аудиториях.
2) $250-240=10$ оставшихся участников переводятся в запасную аудиторию.
3) $\dfrac{10}{250}=0,04$ - вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

*Ответ: 0,04.*

---

**№5.** **Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.**

*Решение:*

Вероятность события "произведена неисправная батарейка" равна $0,04$, тогда вероятность противоположного события "произведена исправная батарейка" равна $1-0,04=0,96$. Вероятность события "система забракует исправную батарейку" равна $0,01$.

События "произведена исправная батарейка" и "исправная батарейка забракована" независимы, поэтому вероятность события А - "произведена и забракована исправная батарейка" равна

$P(A)=0,01\cdot 0,96=0,0096$.

Аналогично находим вероятность события B - "произведена и забракована неисправная батарейка": $P(B)=0,04\cdot 0,95=0,038$. События A и B несовместны. Искомая вероятность равна

$P(A)+P(B)=0,0096+0,038=0,0476$.

Или другая запись решения с помощью дерева вероятностей.

*Ответ: 0,0476.*

---

**№6.** **Решите уравнение** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+4}=256^{x}$.

*Решение:*

$\left(4^{-1}\right)^{x+4}=4^{4x},\ \ 4^{-x-4}=4^{4x},\ \ -x-4=4x,\ \ -4=4x+x,\ \ 5x=-4,\ \ x=-\frac{4}{5},\ \ \underline{x=-0,8}$. *Ответ: -0,8.*

---

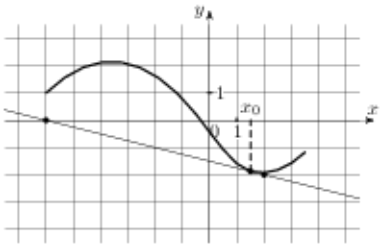
**№7.** **Найдите значение выражения** $\frac{\log_3 14}{\log_{81} 14}$.

*Решение:*

$\frac{\log_3 14}{\log_{81} 14}=\frac{\log_{14} 81}{\log_{14} 3}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$. *Ответ: 4.*

---

**№8.** **На рисунке изображены график функции** $y=f(x)$ **и касательная к нему в точке с абсциссой** $x_0$**. Найдите значение производной функции** $f(x)$ **в точке** $x_0$**.**




*Решение:*

$(x_1;y_1)=(-6;0)$ и $(x_2;y_2)=(2;-2)$.

Угловой коэффициент прямой вычислим по формуле: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

$k=\frac{-2-0}{2-(-6)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}=-0,25$.

Исходя из геометрического смысла производной, получим

$f'(x_0)=k=-0,25$.

*Ответ: -0,25.*

**№9.** **Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a$ км/ч$^2$. Скорость $v$ вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где $l-$ пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч$^2$.**

*Решение:*

$110=\sqrt{2\cdot 1\cdot a},\ \ 12100=2a,\ \ a=6050$.

*Ответ: 6050.*

---

**№10.** **От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.**

*Решение:*

$t_I > t_{II}$ на 1 час

| | V | S | t |
|---|---|---|---|
| I | $x\ \ (x>0)$ | 420 | $420/x$ |
| II | $x+1$ | 420 | $420/(x+1)$ |

$$\frac{420}{x}-\frac{420}{x+1}=1;\ 420x+420-420x-x(x+1)=0$$

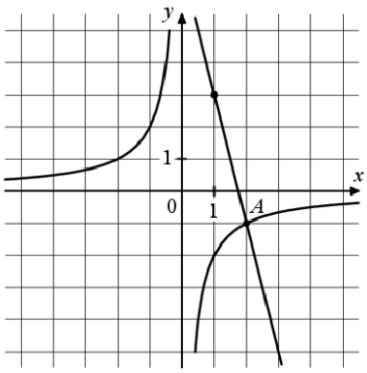
$$x^2+x-420=0,\ D=41^2$$

$$x=\frac{-1\pm 41}{2},\ \ x>0,\ \ x=20$$

*Ответ: 20.*

---

**№11.** **На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках $A$ и $B$. Найдите абсциссу точки $B$.**




*Решение:*

Прямая $g(x)=ax+b$, угловой коэффициент: $a=-\frac{4}{1}=-4$.

$(1;3)\ \ 3=-4\cdot 1+b,\ \ b=7;\ \ g(x)=-4x+7$.

Гипербола $f(x)=\frac{k}{x}$. $(2;-1)\ \ -1=\frac{k}{2},\ \ k=-2;\ f(x)=-\frac{2}{x}$.

$$\begin{cases} g(x)=-4x+7 \\ f(x)=-\frac{2}{x} \end{cases};\ \ -\frac{2}{x}=-4x+7,\ \ 4x^2-7x-2=0,$$

$$x_A=2\ \ \ x_B=-0,25$$

*Ответ: -0,25.*

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

**№12.** **Найдите наименьшее значение функции** $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ **на отрезке** $[1;4]$.

*Решение:*

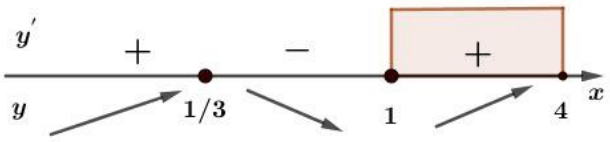
$$y = x^3 - 2x^2 + x + 3,\ \ D(y) = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 1,\ \ y' = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

На заданном отрезке функция возрастает, значит, наименьшему значению аргумента соответствует наименьшее значение функции.

$$y_{\underset{[1;4]}{наим}} = y(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 + 3 = 3$$




*Ответ: 3.*

## *Часть 2*

**№13.** **а) Решите уравнение** $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$.

**б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

*Решение:*

а) $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$

$$2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} + 2\sin x$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} - 2\sin x = 0$$

$$2\sin x(\sin x - 1) + \sqrt{3}(\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$$

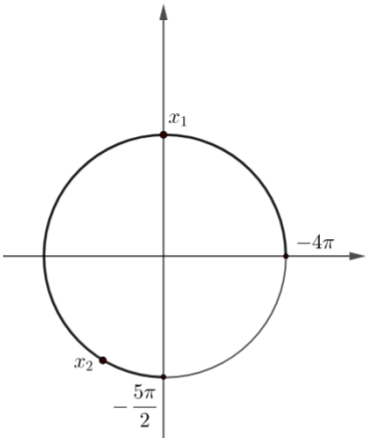
$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = 1$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

*б)* Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.




$$x_1 = -4\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{2},$$

$$x_2 = -3\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3},\ x_3 = -2\pi$$

*Ответ: а)* $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$;

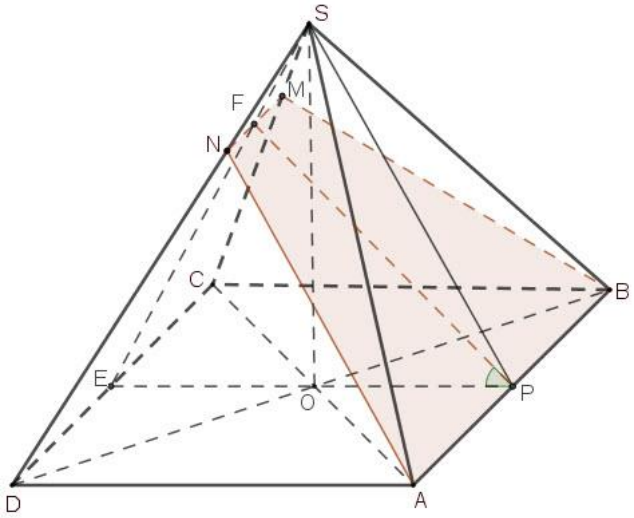
*б)* $-\frac{7\pi}{2},\ -\frac{8\pi}{3}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

**№14.** **Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость $\alpha$ проходит через ребро $AB$ и пересекает ребра $SC$ и $SD$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.**

**а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.**

**б) Найдите косинус угла между плоскостью $\alpha$ и плоскостью основания пирамиды.**




*Решение:*

а) Пусть $MN = a$, тогда $AB = AN = BM = 5a$. Поскольку в правильной четырехугольной пирамиде в основании - квадрат $ABCD$, то $DC = 5a$. $AB \parallel CD$ как противолежащие стороны квадрата, следовательно, $AB \parallel CSD$. $ABN \cap CSD = NM$, тогда $NM \parallel AB$ и $NM \parallel CD$.

Треугольники $SNM$ и $SDC$ подобны по двум углам ($\angle S -$ общий, $\angle SNM = \angle SDC$ как соответственные при $NM \parallel CD$ и секущей $SD$), следовательно $\frac{NM}{CD} = \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{5}$ и тогда $\frac{SN}{ND} = \frac{SM}{MC} = \frac{1}{4}$.

б) Через центр основания пирамиды проведем прямую $PE \parallel AD$, значит, $PE \perp AB$. Плоскость, проходящая через высоту пирамиды $SO$ и прямую $PE$ будет перпендикулярна ребру $AB$. Плоскость $\alpha$ - это плоскость $ABN$, $ABN \cap ABC = AB$ и $SPE \perp AB$. Тогда линейный угол двугранного угла между плоскостями $ABN$ и $ABC$ - это $\angle FPE -$ искомый, где $F -$ это точка пересечения $SE$ и $NM$.

В равнобедренной трапеции $ANMB$ $PF -$ высота и

$$PF = \sqrt{AN^2 - \left(\frac{AB - NM}{2}\right)^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{5a - a}{2}\right)^2} = \sqrt{25a^2 - 4a^2} = a\sqrt{21}.$$

В прямоугольном треугольнике $SOE$ $EO = \frac{AD}{2} = \frac{5a}{2}$, $SE = 5x$, тогда

$$\cos\angle SEO = \frac{EO}{SE} = \frac{5a}{2} : 5x = \frac{a}{2x}.$$

В треугольнике $FPE$ по теореме косинусов $PF^2 = EF^2 + PE^2 - 2 \cdot EF \cdot PE \cdot \cos\angle FEP$, где $EF = \frac{4}{5}SE = \frac{4}{5} \cdot 5x = 4x$, $PE = 5a$ и $\angle FEP = \angle SEO$. Тогда получим

$$\left(a\sqrt{21}\right)^2 = (5a)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 4x \cdot \frac{a}{2x}, \quad 21a^2 = 25a^2 + 16x^2 - 20a^2, \quad x = a.$$

В треугольнике $FPE$ по теореме косинусов

$$EF^2 = PE^2 + PF^2 - 2 \cdot PE \cdot PF \cdot \cos\angle FPE, \quad (4a)^2 = (5a)^2 + \left(a\sqrt{21}\right)^2 - 2 \cdot 5a \cdot a\sqrt{21} \cdot \cos\angle FPE$$

$$16a^2 = 25a^2 + 21a^2 - 10\sqrt{21} \cdot \cos\angle FPE, \quad -30 = -10\sqrt{21} \cdot \cos\angle FPE, \quad \cos\angle FPE = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

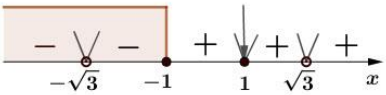
*Ответ: б)* $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

**№15.** **Решите неравенство** $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{4^{x^2}-16\cdot 2^{x^2}+64}\le 0$ **.**

*Решение:*

$$\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{\left(2^{x^2}-8\right)^2}\le 0,\quad \frac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{\left(2^{x^2}-2^3\right)^2}\le 0,\quad \frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(2-1)^2\left(x^2-3\right)^2}\le 0,\quad \frac{(x-1)^2(x+1)}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2}\le 0$$




*Ответ:* $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};-1\right]\cup\{1\}$.

---

**№16.** **15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн. рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:**
**- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r$ % по сравнению с концом предыдущего месяца;**
**- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;**
**- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;**
**- к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен.**
**Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2031 году составила 3 951 тыс. рублей?**

*Решение:*
За 60 месяцев долг перед банком 18 000 тыс. руб. по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда ежемесячно долг уменьшается на $\dfrac{18\ 000}{60}=300$ тыс. руб.

| *Месяц* | *Начисленные проценты на 1-е число месяца* | *Выплаты со 2-го по 14-е число месяца* | *Долг на 15-е число месяца* |
|---|---|---|---|
| Декабрь 2026 | | | $18\ 000$ |
| 1. Январь 2027 | $18\ 000\cdot\dfrac{r}{100}=180r$ | $180r+300$ | $18\ 000-1\cdot 300=17\ 700$ |
| … | … | … | … |
| 48. Декабрь 2030 | … | … | $18\ 000-48\cdot 300=3\ 600$ |
| 49. Январь 2031 | $3\ 600\cdot\dfrac{r}{100}=36r$ | $36r+300$ | $18\ 000-49\cdot 300=3\ 300$ |
| … | … | … | … |
| 59. Ноябрь 2031 | … | … | $18\ 000-59\cdot 300=300$ |
| 60. Декабрь 2031 | $300\cdot\dfrac{r}{100}=3r$ | $3r+300$ | $18\ 000-60\cdot 300=0$ |

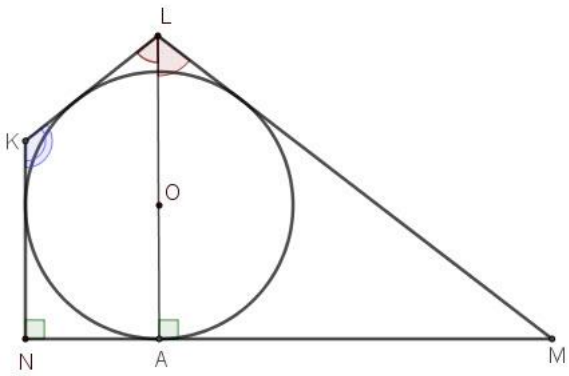
Последовательность выплат является арифметической прогрессией, поэтому сумма платежей в 2031 году составит $\sum=36r+\ldots+3r+300\cdot 12=\dfrac{36r+3r}{2}\cdot 12+3600=234r+3600$.

Поскольку общая сумма платежей в 2031 году составила 3 951 тыс. рублей, то составим уравнение и решим его $234r+3600=3951,\ \ 234r=351,\ \ r=1{,}5$

*Ответ: 1,5.*

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

**№17.** **В четырехугольник $KLMN$ вписана окружность с центром в точке $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.**
**а) Доказать, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.**
**б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = \sqrt{3}$.**



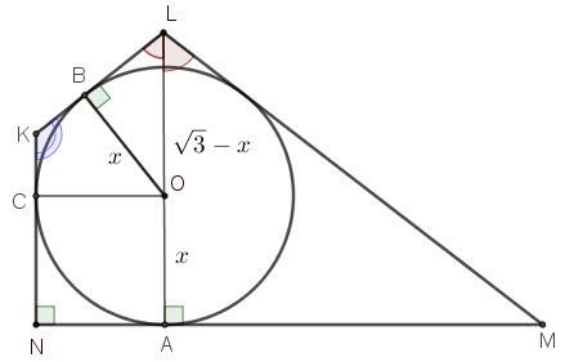

*Решение:*
а) Центр вписанной в многоугольник окружности - это точка пересечения биссектрис этого многоугольника. Значит, $LO-$ биссектриса $\angle KLM$ и

$$\angle KLO = \angle MLO = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

В четырехугольнике сумма углов равна $360^\circ$, тогда в четырехугольнике $KLMN$

$$\angle LMN = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 30^\circ.$$

Предположим, что точка $O$ не лежит на прямой $AL$. Рассмотрим четырехугольник $AMLO$. $OA \perp AM$ поскольку $A-$точка касания окружности и стороны $NM$. Сумма углов четырехугольника $AMLO$ равна $360^\circ$, тогда $\angle AOL = 360^\circ - \angle OAM - \angle AML - \angle MLO = 360^\circ - 90^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 180^\circ$. Получили, что $\angle AOL-$ развернутый, следовательно, точки $A,\ O,\ L$ лежат на одной прямой.




б) $\triangle ALM-$ прямоугольный треугольник, $AL = \sqrt{3}$ и $\angle ALM = 60^\circ$, значит, $AM = AL \cdot tg60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.
Пусть радиус вписанной окружности равен $x$, $C-$ точка касания окружности и стороны $NK$, тогда $OA = OC = x$ и $\angle OCN = \angle CNA = \angle NAO = 90^\circ$. Четырехугольник $ANCO-$квадрат, значит, $NA = x$.
Пусть $B-$точка касания окружности и стороны $KL$, тогда $\triangle LBO-$прямоугольный треугольник, в котором $\angle BLO = 60^\circ$, $LO = AL - OA = \sqrt{3} - x$ и $BO = x$.

$$BO = LO \cdot \sin\angle BLO,\ \ x = \left(\sqrt{3} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x = \frac{3}{2+\sqrt{3}} = 6 - 3\sqrt{3}.$$

$$MN = NA + AM = 6 - 3\sqrt{3} + 3 = 9 - 3\sqrt{3}.$$

*Ответ: б)* $9 - 3\sqrt{3}$.

---

**№18.** **Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2 + 2\left(x+\frac{4}{x}\right) - 49a + 14 = 0$ имеет ровно два различных корня.**

*Решение:*

При $a = 0$ получим уравнение $2\left(x+\frac{4}{x}\right) + 14 = 0,\ \ x + \frac{4}{x} = -7,\ \ x^2 + 7x + 4 = 0\ \ (x \neq 0),\ \ D = 33 > 0$, которое имеет два различных решения.

При $a \neq 0$ введем замену $t = x + \frac{4}{x}$ и получим квадратное уравнение $at^2 + 2t - 49a + 14 = 0$.

$$D/4 = 1 - a(-49a + 14) = 49a^2 - 14a + 1 = (7a-1)^2,\ t_1 = \frac{-1+(7a-1)}{a} = \frac{7a-2}{a},\ \ t_2 = \frac{-1-(7a-1)}{a} = -7.$$

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

$D=0$ при $a=\frac{1}{7}$ корни $t_1=t_2=-7$, тогда $x+\frac{4}{x}=-7$ и исходное уравнение имеет два различных корня. При $a\neq\frac{1}{7}$ $t_1\neq t_2$ исходное уравнение будет иметь только два различных корня, если уравнение $x+\frac{4}{x}=\frac{7a-2}{a}$ корней не имеет.

$ax^2-(7a-2)x+4a=0,\ D=(7a-2)^2-16a^2=33a^2-28a+4,\ D<0$.

$33a^2-28a+4<0,\ \left(a-\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{11}\right)<0,\ a\in\left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a=0$, $a=\frac{1}{7}$ и $a\in\left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$.

*Ответ:* $\left\{0;\frac{1}{7}\right\};\left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$.

---

**№19. На доске записано $k$ последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20 меньше, чем чисел, делящихся на 23.**
**а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?**
**б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?**
**в) Найдите наибольшее возможное значение $k$.**

*Решение:*

а) Приведем пример. Пусть записаны числа от 23 до 92 включительно. Среди них 4 числа, кратных 23: это 23, 46, 69, 92. При этом, кратных 20 чисел ровно 3: 40, 60, 80. Данный набор соответствует условию.

б) Нет. Разобьем все числа на группы по 20, начиная с первого числа. Тогда в каждой группе будет ровно одно число, кратное 20. Заметим, что последняя группа, возможно, будет неполной и/или не будет содержать число, кратное 20. Значит, общее количество чисел, не превосходит $10\cdot 20+19=219$. Теперь рассмотрим крайние числа, кратные 23. Пусть это $23x$ и $23y$. Тогда $y-x\geq 10$ (поскольку чисел, кратных 23, больше 10, например, $11-1\geq 10$), и $23y-23x=23(y-x)\geq 230$, что невозможно для 219 чисел.

в) Пусть среди данных чисел есть $x$ чисел, кратных 20. Тогда согласно пункту б) общее количество числе не больше $20x+19$. С другой стороны, разность между крайними числами, кратными 23, должна быть не менее $23x$, поэтому общее количество чисел не меньше $23x+1$. Имеем: $23x+1\leq 20x+19,\ x\leq 6$, то есть $20x+19\leq 139$. Значит, наименьшее возможное количество чисел равно 139. Например, среди чисел от 161 до 299 есть 6 кратных 20 и 7 кратных 23.

*Ответ: а) да, б) нет, в) 139.*