Досрочный ЕГЭ по математике (резервный день)

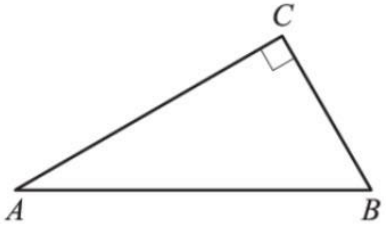
Профильный уровень

11 класс 17.04.2025

Примерный вариант 2

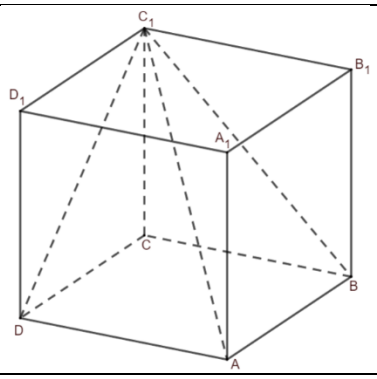
Часть 1

№1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 25,\ AC = 20$. Найдите $\sin A$.



№2. Даны векторы $\vec{a}(0;-3)$, $\vec{b}(-2;4)$ и $\vec{c}(4;-1)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.

№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BC=9,\ CD=3,\ CC_1=7$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ D,\ C_1$.



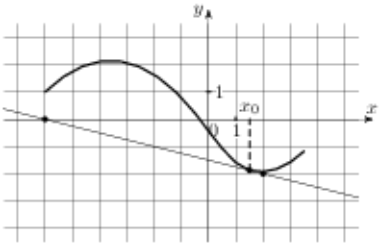
№4. В чемпионате по гимнастике участвует 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные - из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

№5. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».

№6. Решите уравнение $(x+8)^5 = 243$.

№7. Найдите значение выражения $38\sqrt{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

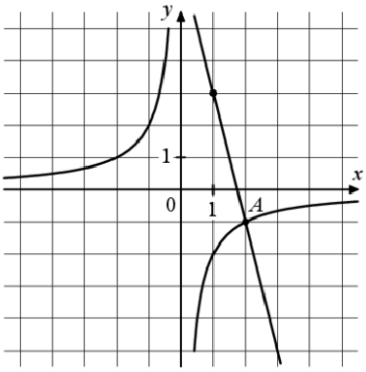
№8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсцисс x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



№9. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с - скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов, f – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

№10. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

№11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№12. Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№14. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $AC_1 = BD = 2$.

№15. Решите неравенство $\frac{1}{\log_3 x+4}+\frac{2}{\log_3(3x)}\cdot\left(\frac{2}{\log_3 x+4}-1\right)\le 0$.

№16. В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 30% от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь в каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны по 338 тыс. рублей;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат по кредиту за пять лет.

№17. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CC_1 и медиана AA_1, причем точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что $\triangle ABC$ – равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1 : CC_1 = 3:2$ и $A_1C_1 = 2$.

№18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right| = \sin^2 x+\cos x-a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

№19. Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, … , 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

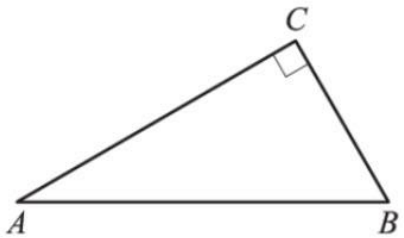
▪ *Ответы*

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
0,6	*4*	*63*	*0,25*	*0,12*	*-5*	*114*	*-0,25*	*202*	*16*	*-0,25*	*4*

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $\pi+2\pi k,$ $\frac{\pi}{3}+2\pi n,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi n;$ $k,n\in\mathbb{Z}$ *б)* $-3\pi;-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\left(\frac{1}{81};\frac{1}{27}\right]\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$	*1 090 000*	$8\sqrt{2}$	$(-\infty;0];\frac{1}{4}$	*а) нет, б) нет, в) 10.*

Решение. ***Часть 1***

№1. **В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=25,\ AC=20$. Найдите $\sin A$.**



Решение:

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15$$

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{15}{25}=0,6$$

Ответ: 0,6.

№2. **Даны векторы $\vec{a}(0;-3)$, $\vec{b}(-2;4)$ и $\vec{c}(4;-1)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.**

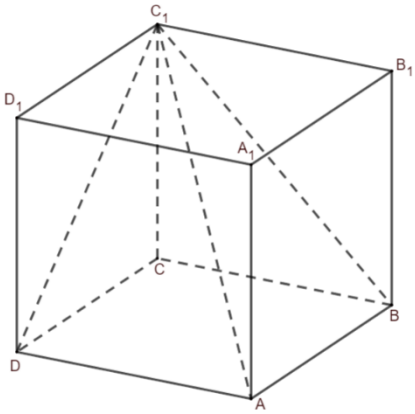
Решение:

$$\vec{a}(0;-3)+2\cdot\vec{b}(-2;4)+\vec{c}(4;-1)=\big(0+2\cdot(-2)+4;-3+2\cdot4+(-1)\big)=(0;4)$$

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{0^2+4^2}=4$$

Ответ: 4.

№3. **В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BC=9,\ CD=3,\ CC_1=7$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ D,\ C_1$.**



Решение:

Многогранник с заданными вершинами - это четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$ и высотой CC_1, поскольку $CC_1\perp ABC$.

$$V_{ABCDC_1}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot9\cdot3\cdot7=63.$$

Ответ: 63.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№4. **В чемпионате по гимнастике участвует 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные - из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.**

Решение:
Всего 20 спортсменок, у всех равные шансы выступать первой. Поэтому имеется 20 равновероятных исходов. Из Китая $20-(8+7)=5$ спортсменок, поэтому имеются 5 благоприятных исходов для события "спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая". Искомая вероятность равна $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0,25$.

Ответ: 0,25.

№5. **Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».**

I / II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего имеется 25 равновозможных исходов «три очка не выпали ни разу ". Благоприятных исходов при этом условии «сумма выпавших очков окажется равна 8» - 3 события.

Искомая вероятность $\frac{3}{25}=0,12$.

Ответ: 0,12.

№6. **Решите уравнение** $(x+8)^5=243$.

Решение:
$(x+8)^5=3^5,\quad x+8=3,\quad x=-8+3,\quad \underline{x=-5}$.

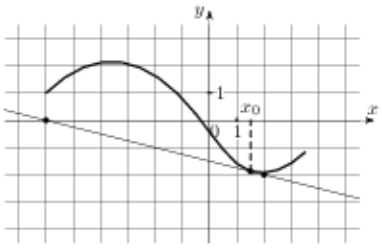
Ответ: -5.

№7. **Найдите значение выражения** $38\sqrt{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

Решение:
$38\sqrt{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=38\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=114$.

Ответ: 114.

№8. **На рисунке изображены график функции** $y=f(x)$ **и касательная к нему в точке с абсцисс** x_0. **Найдите значение производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0.



Решение:
На касательной отмечены точки с координатами $(x_1;y_1)=(-6;0)$ и $(x_2;y_2)=(2;-2)$.

Угловой коэффициент прямой вычислим по формуле: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

$$k=\frac{-2-0}{2-(-6)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}=-0,25.$$

Исходя из геометрического смысла производной, получим $f'(x_0)=k=-0,25$.

Ответ: -0,25.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№9. **Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 198 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с - скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов, f – частота отраженного от дна сигнала, регистрируемая приемником (в МГц). Определите частоту отраженного сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с. Ответ выразите в МГц.**

Решение:

$$15 = 1500 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad 1 = 100 \cdot \frac{f - 198}{f + 198}, \quad f + 198 = 100f - 19800, \quad 99f = 19998, \quad f = 202.$$

Ответ: 202.

№10. **Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.**

Решение:

Пусть $V_{собств.} = x$ км/ч $(x > 0)$, тогда

	S	V	t
По течению	255	$x+1$	$\frac{255}{x+1}$
Против течения	255	$x-1$	$\frac{255}{x-1}$

$$\frac{255}{x+1} + \frac{255}{x-1} = 34 - 2, \quad x \neq 1$$

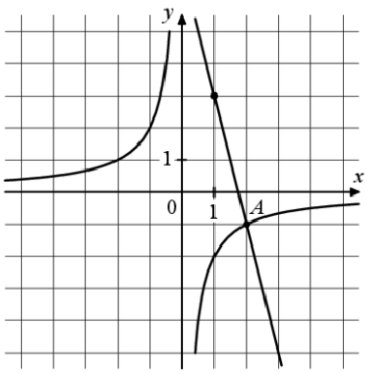
$$255x + 255 + 255x - 255 = 32\left(x^2 - 1\right)$$

$$32x^2 - 510x - 32 = 0, \quad 16x^2 - 255x - 16 = 0$$

$$D = 255^2 + 4 \cdot 16^2 = 65025 + 1024 = 66049 = 257^2, \quad x = \frac{255 + 257}{32} = 16$$

Ответ: 16.

№11. **На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.**



Решение:

1) Прямая $g(x) = ax + b$, угловой коэффициент: $a = -\frac{4}{1} = -4$.

$(1;3)$ $3 = -4 \cdot 1 + b$, $b = 7$; $g(x) = -4x + 7$.

2) Гипербола $f(x) = \frac{k}{x}$. $(2;-1)$ $-1 = \frac{k}{2}$, $k = -2$; $f(x) = -\frac{2}{x}$.

3) $\begin{cases} g(x) = -4x + 7 \\ f(x) = -\frac{2}{x} \end{cases}$; $-\frac{2}{x} = -4x + 7$, $4x^2 - 7x - 2 = 0$,

$$x_A = 2 \quad x_B = -0,25$$

Ответ: -0,25.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

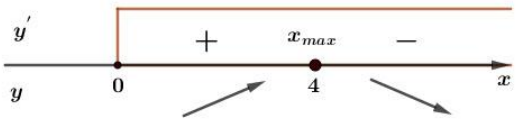
№12. **Найдите точку максимума функции** $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Решение:

$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$; $D(y) = [0;\infty)$

$y' = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 6 - 3x^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{x} = 3\left(2 - \sqrt{x}\right)$

$y' = 0,\ \ 2 - \sqrt{x} = 0,\ \ \sqrt{x} = 2,\ \ x = 4$



$x_{\max} = 4$.

Ответ: 4.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение** $\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$,

$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x - \sqrt{3}(\cos x + 1) = 0$

$2\sin x(\cos x + 1) - \sqrt{3}(\cos x + 1) = 0$

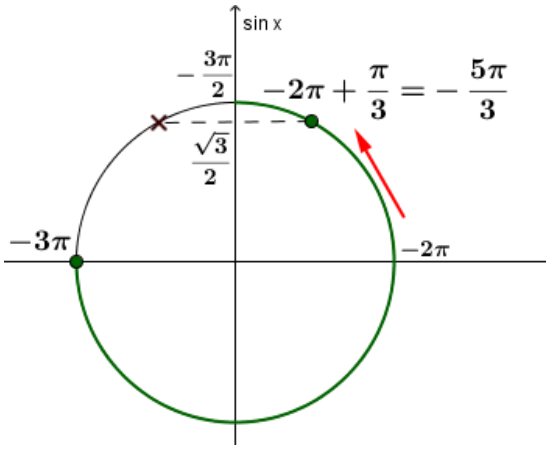
$(\cos x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\cos x = -1 \qquad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pi + 2\pi k \qquad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

б)



$x_1 = -3\pi,\ \ x_2 = -\frac{5\pi}{3}$

Ответ: а) $\pi + 2\pi k,\ \ \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\ \ k, n \in \mathbb{Z}$;

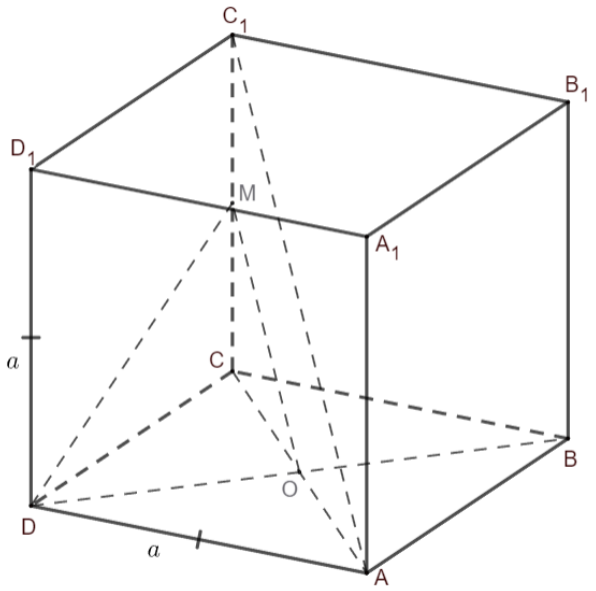
б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№14. **Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.**

а) Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $AC_1 = BD = 2$.



Решение:

а) Поскольку призма прямая, то боковые ребра перпендикулярны плоскости основания, значит, $CC_1 \perp ABC$. AC – проекция наклонной AC_1 на плоскость ABC и $AC \perp BD$ по свойству диагоналей ромба, так как по условию основание призмы - ромб. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах и $AC_1 \perp BD$.

б) Пусть $AB = AA_1 = a$, O – точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$, значит, точка O их середина. Проведем в треугольнике ACC_1 $OM \parallel AC_1$, OM – средняя линия. Треугольник DOM – прямоугольный, так как $AC_1 \perp BD$ и $OM \parallel AC_1$, значит, $BD \perp OM$.

$$OM = \frac{AC_1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad DM = \frac{BD}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

В $\triangle DOM$ $\quad DM = \sqrt{DO^2 + OM^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

В $\triangle MCD$ $\quad DC = a, \; MC = \frac{CC_1}{2} = \frac{a}{2}, \; MD^2 = DC^2 + MC^2, \; 2 = a^2 + \frac{a^2}{4}, \; a = \sqrt{\frac{8}{5}}$.

В $\triangle AOD$ $\quad AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{\frac{8}{5} - 1} = \sqrt{\frac{3}{5}}$, тогда $AC = 2AO = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$.

$$V_{призмы} = S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

№15. **Решите неравенство** $\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1\right) \le 0$.

Решение:

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1\right) \le 0, \quad t = \log_3 x$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left(\frac{2}{t+4} - 1\right) \le 0, \quad \frac{1}{t+4} - \frac{2}{1+t} \cdot \frac{t+2}{t+4} \le 0, \quad \frac{t+3}{(t+4)(t+1)} \ge 0, \quad \left[\begin{array}{l} -4 < t \le -3 \\ t > -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -4 < \log_3 x \le -3 \\ \log_3 x > -1 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{81} < x \le \frac{1}{27} \\ x > \frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№16. **В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:**

- **в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 30% от суммы долга на конец предыдущего года;**
- **в период с февраля по июнь в каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;**
- **в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным S тыс. рублей;**
- **выплаты в 2030 и 2031 годах равны по 338 тыс. рублей;**
- **к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.**

Найдите общую сумму выплат по кредиту за пять лет.

Решение:

Пусть сумма кредита равна S тыс. рублей.

Год	*Долг с начисленными процентами на январь*	*Выплаты с февраля по июнь*	*Долг в июле*
2026			S
2027	$1,3S$	$1,3S-S=0,3\cdot S$	S
2028	$1,3S$	$1,3S-S=0,3\cdot S$	S
2029	$1,3S$	$1,3S-S=0,3\cdot S$	S
2030	$1,3S$	338	$1,3S-338$
2031	$1,3(1,3S-338)$	338	$1,3(1,3S-338)-338=0$

Последний платеж должен погасить долг по кредиту полностью, поэтому $1,3(1,3S-338)-338=0$,

$1,69S-439,4-338=0,\ 1,69S=777,4\quad S=460$.

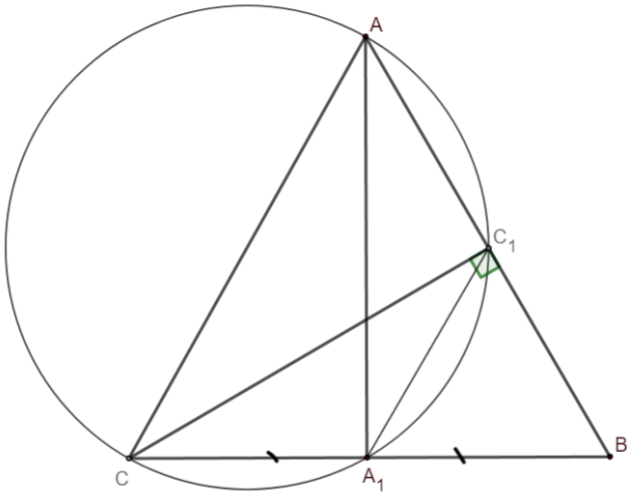
Общая сумма выплат по кредиту составит $3\cdot 0,3S+2\cdot 338=0,9\cdot 460+676=1\ 090$ тыс. руб.

Ответ: 1 090 000 рублей.

№17. **В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CC_1 и медиана AA_1, причем точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности.**

а) Докажите, что $\triangle ABC-$ равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AA_1:CC_1=3:2$ и $A_1C_1=2$.



Решение:

а) CC_1-высота $\triangle ABC$, значит, $\angle CC_1A=90^\circ$ и он вписанный. Вписанный $\angle AA_1C=90^\circ$, поскольку опирается на ту же дугу, что и $\angle CC_1A$. AA_1-медиана и высота $\triangle ABC$, следовательно, $\triangle ABC-$ равнобедренный с основанием BC.

б) В прямоугольном $\triangle BCC_1$ A_1C_1-медиана, проведенная к гипотенузе, значит, $A_1C_1=A_1C=A_1B=2$ и $BC=4$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AA_1\cdot BC=\frac{1}{2}CC_1\cdot AB,\ 3x\cdot 4=2x\cdot AB,\ AB=6$.

$\triangle A_1AB\ \ AA_1=\sqrt{AB^2-A_1B^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AA_1\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4=8\sqrt{2}$. *Ответ: б)* $8\sqrt{2}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень

Решение:

Раскроем модуль.

(1) Если $\sin^2 x+2\cos x+a\ge 0$, то уравнение примет вид $\sin^2 x+2\cos x+a=\sin^2 x+\cos x-a$, $\cos x=-2a$.

Уравнение $\cos x=-2a$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ имеет единственный корень $x=\arccos(-2a)$, если $-1\le -2a<0,\ 0<a\le\frac{1}{2}$.

Проверим условие (1), подставив $\cos x=-2a$.

$$\sin^2 x+2\cos x+a\ge 0$$
$$1-\cos^2 x+2\cos x+a\ge 0$$
$$1-4a^2-4a+a\ge 0$$
$$4a^2+3a-1\le 0\Leftrightarrow -1\le a\le\frac{1}{4}.$$

Итак, при $0<a\le\frac{1}{4}$ исходное уравнение на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ имеет один корень $x=\arccos(-2a)$ и не имеет корней при $a\le 0$ и при $a>\frac{1}{4}$.

(2) Если $\sin^2 x+2\cos x+a<0$, то исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x+2\cos x+a=-\sin^2 x-\cos x+a$$
$$2\sin^2 x+3\cos x=0$$
$$(2\cos x+1)(\cos x-2)=0$$
$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

Уравнение $\cos x=-\frac{1}{2}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ имеет единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$.

Подставим его в неравенство $\sin^2 x+2\cos x+a<0$, получим: $\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+a<0\Leftrightarrow a<\frac{1}{4}$.

В этом случае уравнение имеет единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и не имеет корней при $a\ge\frac{1}{4}$.

3) Исходное уравнение на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$: при $a\le 0$ имеет единственный корень $x=\frac{2\pi}{3}$; при $0<a<\frac{1}{4}$ имеет два различных корня $x=\frac{2\pi}{3}$ и $x=\arccos(-2a)$; при $a=\frac{1}{4}$ имеет единственный корень $x=\arccos(-2a)$; при $a>\frac{1}{4}$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty;0];\frac{1}{4}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№19. **Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, … , 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.**

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Решение:

а) Поскольку в каждой паре одно число ровно в три раза больше другого, то выпишем все пары таких чисел из заданной последовательности: (1; 3), (2; 6), (3; 9), (4; 12), (5; 15), (6; 18), (7; 21). Пару чисел (7; 21) исключаем, так как их сумма превосходит 27. В парах (1; 3) и (3; 9), (2; 6) и (6; 18) имеются повторяющиеся числа 3 и 6. Исключаем те пары, сумма чисел в которых меньшая. Остаются пары: (3; 9), (4; 12), (5; 15), (6; 18). Найдем сумму всех оставшихся чисел 12+16+20+24=72, что не равно 170.

б) Сумма всех данных чисел равна $\frac{1+22}{2}\cdot 22=23\cdot 11=253$.

Поскольку сумма чисел в паре не превосходит 27 и эти суммы различны, то максимальная сумма всех чисел, которые могут получиться из 11 пар равна $27+26+\ldots+18+17=\frac{17+27}{2}\cdot 11=22\cdot 11=242$. При $k=11$ получаем, что все 22 числа должны образовывать пары и их сумма, равная 253 оказалась больше, чем 242. Значит, k не может равняться 11.

в) Проверим, может ли $k=10$? Приведем пример, где выполняются все условия задачи: 20+7=27, 19+6=25, 18+8=26, 15+9=24, 13+10=23, 17+5=22, 16+4=20, 14+3=17, 12+2=14, 11+1=12. Поскольку в пункте б) доказали, что k не может равняться 11, то приведенный пример для $k=10$ подтверждает, что оно и является наибольшим.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 10.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru