Досрочный ЕГЭ по математике (резервный день)

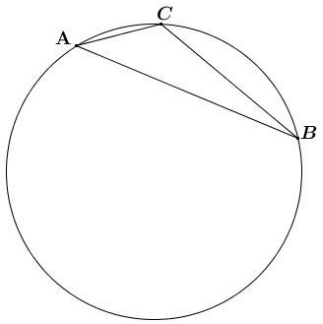
Профильный уровень

11 класс 17.04.2025

Примерный вариант

Часть 1

№1. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



№2. Даны векторы $\vec{f}=(-1;\ 0)$, $\vec{c}=(13;\ 6)$ и $\vec{a}=(0;\ -11)$. Найдите длину вектора $3\vec{f}-\vec{a}+2\vec{c}$. Ответ разделите на $\sqrt{2}$.

№3. Объем куба равен 35937. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

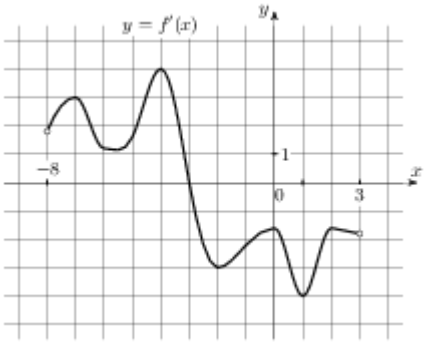
№4. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.

№5. Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.

№6. Решите уравнение $6^{\log_{7776}(8x-4)}=3$.

№7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 14}{\log_{81} 14}$.

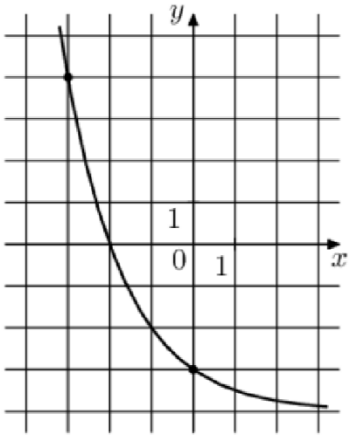
№8. На рисунке изображен график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-3;2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



№9. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2\cdot 10^2$ Па$\cdot$м^5, где p – давление в газе в паскалях, V – объём газа в кубических метрах, $k=\frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $6,25\cdot 10^5$ Па.

№10. Расстояние между городами А и В равно 150 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнав автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

№11. На рисунке изображен график функции $f(x)=a^x+b$. Найдите $f(-5)$.



№12. Найдите наименьшее значение функции $e^{92x}-92e^x+16$ на отрезке $[-50;9]$.

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

№14. В цилиндре на окружности одного из оснований отмечены точки A и B, а на окружности другого основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Доказать, что $\angle ABC_1=90^\circ$.

б) Известно, что $AB=6$, $BB_1=15$, $B_1C_1=8$. Найдите угол между BB_1 и AC_1.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№15. Решите неравенство $\log_7\left(2x^2+12\right)-\log_7\left(x^2-x+12\right)\ge\log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$.

№16. 15 мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й месяц долг должен быть на 50 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1 472 тыс. рублей?

№17. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность, центром которой является точка M, касается оснований трапеции и боковой стороны BA трапеции. Окружность, центром которой является точка N, касается $AD,\ CD,\ BC$. Известны все стороны трапеции: $AD=39,\ CD=30,\ BC=9,\ AB=10$.

а) Доказать, что $MN \parallel BC$.

б) Найдите длину отрезка MN.

№18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$
имеет ровно четыре различных решения.

№19. В классах 11А и 11Б проходило тестирование. В каждом классе его проходили по крайней мере два ученика, а в сумме из двух классов проходили тестирование 51 ученик. Результаты тестирования могут выражаться только натуральным количеством баллов. В каждом классе средний балл результатов оказался натуральным числом. После тестирования один из учеников 11А перешел в 11Б и средние баллы каждого класса были пересчитаны.

а) Мог ли средний балл в 11А вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в 11А вырос на 10%, как и средний балл в 11Б. Мог ли изначальный средний балл в 11Б равняться 1?

в) Средний балл в 11 А вырос на 10%, как и средний балл в 11Б. Найдите наименьшее значение среднего балла в 11Б.

▪ *Ответы*

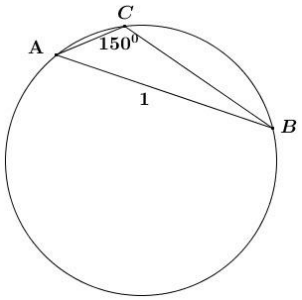
№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
1	*23*	*4492,125*	*0,05*	*0,12*	*30,875*	*4*	*-3*	*0,008*	*90*	*28*	*-75*

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ *б)* $-\frac{19\pi}{6},\ -3\pi,\ -2\pi$	$arctg\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]\cup[3;\infty)$	*1 200 000*	*4*	$\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3};-1\right)$; $\left(-1;-\frac{3}{5}\right)$; $\left(-\frac{3}{5};\frac{-2+\sqrt{2}}{3}\right)$	*а) нет, б) нет, в) 3*

- ***Решение***

Решение. ***Часть 1***

№1. **Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 150°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.**



Решение:

Т. к. треугольник вписан в окружность, то $\frac{AB}{\sin C}=2R$.

$$\frac{1}{\sin 150^\circ}=2R,\quad \frac{1}{\frac{1}{2}}=2R,\quad R=1.$$

Ответ: 1.

№2. **Даны векторы $\vec{f}=(-1;\ 0)$, $\vec{c}=(13;\ 6)$ и $\vec{a}=(0;\ -11)$. Найдите длину вектора $3\vec{f}-\vec{a}+2\vec{c}$. Ответ разделите на $\sqrt{2}$.**

Решение:

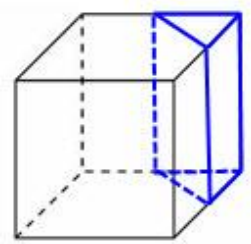
1) $3\vec{f}-\vec{a}+2\vec{c}=3\cdot(-1;\ 0)-(0;-11)+2\cdot(13;\ 6)=(-3;\ 0)-(0;-11)+(26;\ 12)=$

$=(-3-0+26;\ 0+11+12)=(23;\ 23)$

2) $\left|3\vec{f}-\vec{a}+2\vec{c}\right|=\sqrt{23^2+23^2}=23\sqrt{2}$, $\frac{23\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=23$.

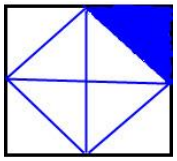
Ответ: 23.

№3. **Объем куба равен 35937. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.**



Решение

Все грани куба – квадраты. Сечение отсекает призму, в основании которой прямоугольный треугольник, составляющий $\frac{1}{8}$ площади квадрата. Высота призмы равна длине ребра куба, поэтому объем треугольной призмы равен $\frac{1}{8}$ объема куба.



$$V_{призмы}=S_{осн}\cdot h=\frac{1}{8}a^2\cdot a=\frac{a^3}{8}=\frac{35937}{8}=4492{,}125.$$

Ответ: 4492,125.

№4. **На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.**

Решение:

Всего 40 спортсменов, у всех равные шансы выступать четырнадцатым. Поэтому имеется 40 равновероятных исходов. Из Аргентины 2 прыгуна, имеются 2 благоприятных исхода для события «четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины». Искомая вероятность равна $\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=0{,}05$.

Ответ: 0,05.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№5. **Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.**

Решение:
Событие «учащийся верно решит больше 7 задач» является объединение двух несовместных событий «верно решит 8 задач» и «верно решит больше 8 задач». Поэтому

$$P(>7)=P(>8)+P(=8)$$
$$0,88=0,76+P(=8)$$
$$P(=8)=0,12$$

Ответ: 0,12.

№6. **Решите уравнение** $6^{\log_{7776}(8x-4)}=3$.

Решение:

$$6^{\log_{6^5}(8x-4)}=3,\quad 6^{\frac{1}{5}\log_6(8x-4)}=3,\quad \left(6^{\log_6(8x-4)}\right)^{\frac{1}{5}}=3,\quad (8x-4)^{\frac{1}{5}}=3,\quad 8x-4=3^5,\quad 8x=243+4,\quad x=30,875.$$

Ответ: 30,875.

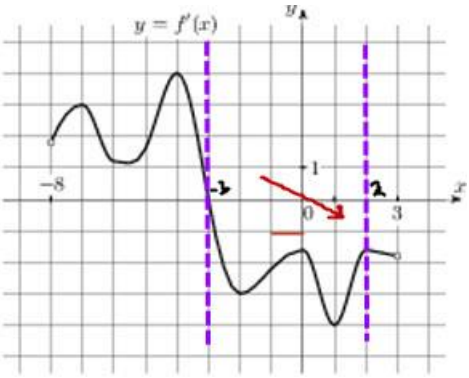
№7. **Найдите значение выражения** $\dfrac{\log_3 14}{\log_{81} 14}$.

Решение:

$$\frac{\log_3 14}{\log_{81} 14}=\frac{\log_{14} 81}{\log_{14} 3}=\log_3 81=\log_3 3^4=4.$$

Ответ: 4.

№8. **На рисунке изображен график** $y=f'(x)$ **— производной функции** $f(x)$**, определенной на интервале** $(-8;3)$**. В какой точке отрезка** $[-3;2]$ **функция** $f(x)$ **принимает наибольшее значение?**



$-3<2$

$f(x)\searrow$ $\quad f(-3)>f(2)$

Решение:
Обращаем внимание, что изображен график производной функции, поэтому вспоминаем, что если $f'(x)<0$, а на заданном отрезке $[-3;2]$ производная функции не положительна, то функция убывает на этом отрезке. Согласно определению убывающей функции: меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции. В задаче просят ответить на вопрос, в какой точке функция принимает наибольшее значение, значит, в ответ даем значение аргумента $x=-3$.

Ответ: -3.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№9. **При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2\cdot 10^2$ Па$\cdot$м^5, где p — давление в газе в паскалях, *V* — объём газа в кубических метрах, $k=\frac{5}{3}$. Найдите какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $6,25\cdot 10^5$ Па.**

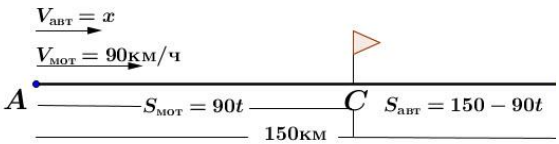
Решение:

$6,25\cdot 10^5\cdot V^{\frac{5}{3}} = 2\cdot 10^2,\quad 625\cdot 10\cdot V^{\frac{5}{3}} = 2,\quad V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5^5}\quad \left(\uparrow^{\frac{3}{5}}\right),\quad V = \frac{1}{125} = 0{,}008.$

Ответ: 0,008.

№10. **Расстояние между городами А и В равно 150 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнав автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.**

Решение:



Пусть t — время, за которое догонит мотоциклист автомобилиста, тогда $S_{AC\ мот} = 90t$. Автомобилист выехал на $30\text{мин} = \frac{1}{2}$ ч раньше и его время движения до пункта С - $\left(\frac{1}{2}+t\right)$, тогда $S_{AC\ авт} = x\cdot\left(\frac{1}{2}+t\right)$. Составим уравнение $x\cdot\left(\frac{1}{2}+t\right) = 90t$.

За то время, которое автомобилист доезжает в В, мотоциклист возвращается обратно в А.

$$\frac{S_{CB}}{x} = t,\quad \frac{150-90t}{x} = t.$$

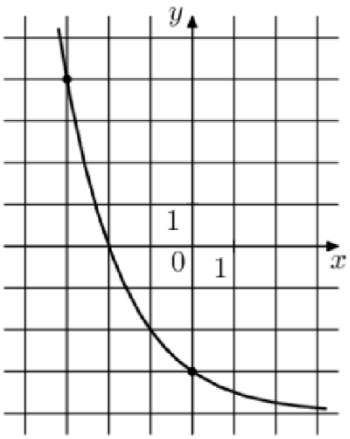
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x\cdot\left(\frac{1}{2}+t\right) = 90t \\ \frac{150-90t}{x} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + xt = 90t \\ 150-90t = xt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 360t - 300 \\ 150-90t = (360t-300)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ t = 1 \end{cases}$$

$S_{AC} = 90t = 90\cdot 1 = 90$ км.

Ответ: 90.

№11. **На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(-5)$.**



Решение:

$(0;-3)\quad -3 = a^0 + b,\ b = -3-1,\ b = -4$

$f(x) = a^x - 4$

$(-3;\ 4)\quad 4 = a^{-3} - 4,\ 8 = a^{-3},\ \frac{1}{a^3} = 2^3,\ a = \frac{1}{2}$

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4,\ f(-5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} - 4 = 32 - 4 = 28$

Ответ: 28.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№12. **Найдите наименьшее значение функции $e^{92x}-92e^{x}+16$ на отрезке $[-50;9]$.**

Решение:

1) $D(y)=\mathbb{R}$

$$y'=\left(e^{92x}\right)'-\left(92e^{x}\right)'$$

$$y'=e^{92x}\cdot(92x)'-92e^{x}$$

$$y'=92e^{92x}-92e^{x}$$

$$y'=92e^{x}\left(e^{91x}-1\right)$$

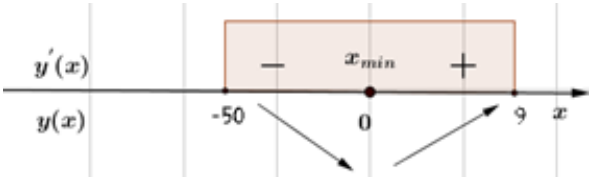
2) $y'=0$

$$92e^{x}\left(e^{91x}-1\right)=0$$

$$e^{x}=0 \qquad e^{91x}-1=0$$

$$\varnothing \qquad x=0$$

3)



$$y_{наим}=y_{\min}=y(0)=e^{0}-92e^{0}+16=1-92+16=-75$$

Ответ: -75.

Часть 2

№13. **а) Решите уравнение $\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$.**

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение:

а) $\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$

$$\sin x+2\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin 2x-1=0$$

$$\sin x+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x\right)-\sqrt{3}\sin 2x-1=0$$

$$\sin x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-1=0$$

$$\sin x+1-2\sin^{2}x-1=0,\ \ \sin x-2\sin^{2}x=0$$

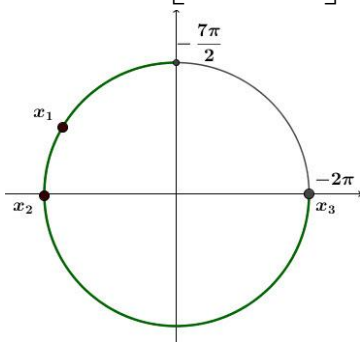
$$\sin x(1-2\sin x)=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \qquad \sin x=0$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad x=\pi k$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

б) Отбор корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.



$$x_1=-3\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{19\pi}{6},\ x_2=-3\pi,$$

$$x_3=-2\pi$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi k$ $k\in\mathbb{Z}$;

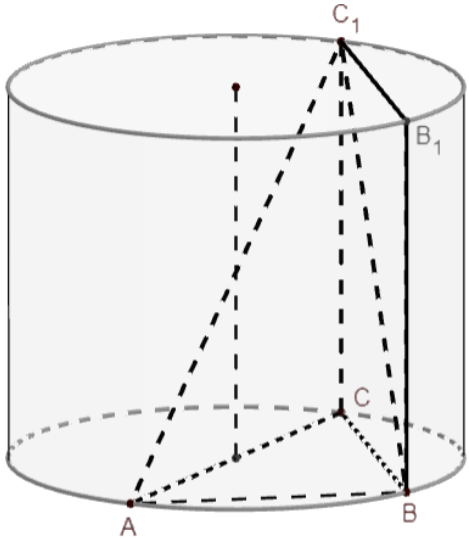
б) $-\frac{19\pi}{6},\ -3\pi,\ -2\pi$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№14. **В цилиндре на окружности одного из оснований отмечены точки A и B, а на окружности другого основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, AC_1 пересекает ось цилиндра.**

а) Доказать, что $\angle ABC_1 = 90^\circ$.

б) Известно, что $AB = 6,\ BB_1 = 15,\ B_1C_1 = 8$. Найдите угол между BB_1 и AC_1.



Решение:

а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1. Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащей точку A, через C. Тогда CC_1 – образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является ее диаметром. Следовательно, $\angle ABC$ – прямой.

Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1, а значит, угол $\angle ABC_1 = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен $\angle AC_1C$. Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 10$,

$tg\angle AC_1C = \dfrac{AC}{CC_1} = \dfrac{AC}{BB_1} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: б) $arctg\dfrac{2}{3}$.

№15. **Решите неравенство** $\log_7\left(2x^2+12\right) - \log_7\left(x^2-x+12\right) \ge \log_7\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение:

$$\log_7\left(2x^2+12\right) \ge \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right) + \log_7\left(x^2-x+12\right)$$

$$\begin{cases} 2x^2+12 \ge \left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x+12\right) \\ 2-\dfrac{1}{x} > 0 \\ x^2-x+12 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2+12 \ge 2x^2-2x+24-x+1-\dfrac{12}{x} \\ \dfrac{2x-1}{x} > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-13x+12}{x} \ge 0 \\ \dfrac{x-0,5}{x} > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-3)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)}{x} \ge 0 \\ \dfrac{x-0,5}{x} > 0 \end{cases}; \quad \underline{x \in \left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right] \cup [3;\infty)}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right] \cup [3;\infty)$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№16. **15 мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:**
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й месяц долг должен быть на 50 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1 472 тыс. рублей?

Решение:

По условию с 1-го по 16-й месяц сумма долга уменьшается равномерно на 50 тыс. рублей каждый месяц. Значит, всего за 16 месяцев будет выплачено банку на покрытие основного тела долга $50\cdot 16=800$ тыс. руб. Последовательность остатков долга банку

$$S;\ \ S-50;\ \ S-100;\ \ S-150;.....;\ \ S-750;\ \ S-800;\ \ 0\ .$$

Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%. Тогда последовательность начисленных процентов на остатки долга:

$$0,02S;\ \ 0,02(S-50);\ \ 0,02(S-100);\ \ 0,02(S-150);.....;\ \ 0,02(S-750);\ \ 0,02(S-800).$$

Суммарно выплаты по кредиту

$$\underset{\substack{\text{выплачен}\\ \text{основной}\\ \text{долг}}}{S}\ \ +\underbrace{0,02S+0,02(S-50)+...+0,02(S-800)}_{\text{выплаты по процентам}}=1472$$

$$S+0,02\cdot\frac{S+(S-800)}{2}\cdot 17=1472$$

$$S+0,17(2S-800)=1472$$

$$1,34S=1608 \qquad S=1200$$

Условие задачи можно оформить в виде таблицы.

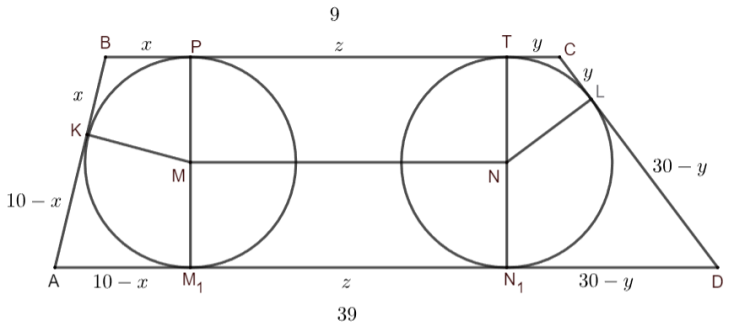
Месяц	*Долг с начисленными процентами на 1-е число*	*Выплаты со 2-го по 14-е*	*Долг на 15-е число*
май			S
1. июнь	$1,02S$	$1,02S-(S-50)=0,02S+50$	$S-50$
2. июль	$1,02(S-50)$	$1,02(S-50)-(S-100)=0,02(S-50)+50$	$S-100$
...	...	...	...
16.	$1,02(S-750)$	$1,02(S-750)-(S-800)=0,02(S-750)+50$	$S-800$
17.	$1,02(S-800)$	$1,02(S-800)=0,02(S-800)+(S-800)$	0

Ответ: 1 200 тыс. рублей.

№17. **Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность, центром которой является точка M, касается оснований трапеции и боковой стороны BA трапеции. Окружность, центром которой является точка N, касается $AD,\ CD,\ BC$. Известны все стороны трапеции: $AD=39,\ CD=30,\ BC=9,\ AB=10$.**

а) Доказать, что $MN \parallel BC$.

б) Найдите длину отрезка MN.



Решение:

а) Пусть окружность с центром M касается основания трапеции AD в точке M_1 а основания BC в точке P, тогда отрезок PM_1 будет перпендикулярен прямым AD и BC. Окружность с центром N касается основания трапеции AD в точке N_1, а основания BC в точке T и отрезок TN_1 перпендикулярен прямым AD и BC.

Тогда $PM_1 \parallel TN_1$, и, поскольку $AD \parallel BC$, то $PM_1 = TN_1$. Четырехугольник $PM_1N_1T -$ прямоугольник.

M и $N -$ центры окружностей, тогда $MP = \dfrac{PM_1}{2} = \dfrac{TN_1}{2} = NT$. Четырехугольник $MNTP -$ прямоугольник, в котором $MN \parallel PT$, но точки P и T лежат на прямой BC, следовательно, $MN \parallel BC$.

б) Пусть $K -$ точка касания окружности с центром M и боковой стороны трапеции AB. По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем: $KB = BP = x,\ AK = AM_1 = 10 - x$.

Пусть $L -$ точка касания окружности с центром N и боковой стороны трапеции CD. По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем: $TC = CL = y,\ LD = DN_1 = 30 - y$.

Обозначим $MN = M_1N_1 = PT = z$, тогда

$AD = AM_1 + M_1N_1 + N_1D,\ 39 = 10 - x + z + 30 - y,\ 39 + x + y = 40 + z$.

$BC = BP + PT + TC,\ 9 = x + z + y,\ 9 - z = x + y$.

Получим $39 + 9 - z = 40 + z,\ 8 = 2z,\ z = 4,\ MN = 4$.

Ответ: б) 4.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№18. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(a+1)x-2ay+5a^2+8a+3=0 \\ y=\pm x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=x \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=-x \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Исследуем количество решений каждой системы из совокупности.
Исходная система будет иметь ровно четыре различных решения, если каждая система из совокупности (1) и (2) имеет ровно два различных решения, и при этом решения систем (1) и (2) не совпадают.
Квадратные уравнения в системах имеют по два различных решения, если их дискриминант положителен.

$$(1)\ \begin{cases} 2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=x \end{cases}$$

$2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0$ $\qquad D>0,\quad -a^2-4a-2>0,\quad -2-\sqrt{2}<a<-2+\sqrt{2}$

$D/4=(3a+2)^2-2\cdot(5a^2+8a+3)=-a^2-4a-2$

$$(2)\ \begin{cases} 2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ y=-x \end{cases}$$

$2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0,$ $\qquad D>0,\quad -9a^2-12a-2>0,\quad \dfrac{-2-\sqrt{2}}{3}<a<\dfrac{-2+\sqrt{2}}{3}$

$D/4=(a+2)^2-2(5a^2+8a+3)=-9a^2-12a-2,$

Исключим совпадение решений системы (1) и (2). Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0 \\ 2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0 \end{cases},\ -\downarrow\ -2(3a+2)x+2(a+2)x=0,\ x\cdot 2a=0,\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ a=0 \end{array}\right..$$

При $a=0$ получим систему $\begin{cases} x^2+y^2-4x+3=0 \\ x^2=y^2 \end{cases}$, $2x^2-4x+3=0,\ \varnothing$, которая не имеет решений.

Если $x=0$, то $y=0$. Подставим в исходную систему уравнений эту пару значений, получим, что

$5a^2+8a+3=0$, $a=-1$ или $a=-\dfrac{3}{5}$.

При $a=-1$ система уравнений имеет три пары решений: $(0;0),\ (1;-1),\ (-1;-1)$.

При $a=-\dfrac{3}{5}$ система уравнений имеет три пары решений: $(0;0),\ \left(\dfrac{2}{5};\dfrac{2}{5}\right),\ \left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$.

Система имеет ровно четыре различных решения при

$$\begin{cases} -2-\sqrt{2}<a<-2+\sqrt{2} \\ \dfrac{-2-\sqrt{2}}{3}<a<\dfrac{-2+\sqrt{2}}{3};\ a\in\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{3};-1\right)\cup\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{3}\right) \\ a\neq 0,\ a\neq -1,\ a\neq -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{3};-1\right)\cup\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{3}\right)$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№19. В классах 11А и 11Б проходило тестирование. В каждом классе его проходили по крайней мере два ученика, а в сумме из двух классов проходили тестирование 51 ученик. Результаты тестирования могут выражаться только натуральным количеством баллов. В каждом классе средний балл результатов оказался натуральным числом. После тестирования один из учеников 11А перешел в 11Б и средние баллы каждого класса были пересчитаны.

а) Мог ли средний балл в 11А вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в 11А вырос на 10%, как и средний балл в 11Б. Мог ли изначальный средний балл в 11Б равняться 1?

в) Средний балл в 11 А вырос на 10%, как и средний балл в 11Б. Найдите наименьшее значение среднего балла в 11Б.

Решение:

а) Пусть в 11А писали тест n учащихся, а средний балл был равен A. Тогда суммарный балл всех учащихся этого класса равнялся nA. После перехода учащегося в 11Б средний балл вырос в два раза, то есть стал равен $2A$, а количество учащихся в 11А стало $n-1$. Тогда суммарный балл после перехода учащегося стал равен $2A(n-1)$. Таким образом, суммарный балл уменьшился на $nA-2A(n-1)=(2-n)A$, что невозможно, поскольку перешедший учащийся набрал положительное количество баллов, а $n\geq 2$.

б) Пусть в 11Б средний балл равнялся B, а перешедший в него учащийся набрал u баллов. Тогда получаем: $u=nA-1{,}1(n-1)A=1{,}1(52-n)B-(51-n)B$ или $10u=(11-n)A=(62-n)B$.

Если $B=1$, то $n=2$, поскольку число $(62-n)B$ должно делиться на 10, а $(11-n)A$ не должно быть отрицательным. Получаем $9A=60$, что невозможно, поскольку $A-$целое.

в) Заметим, что если $B=2$, то $n=2$ или $n=7$. В первом случае $9A=120$, а во втором $4A=110$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=3$ получаем $n=2$, откуда $u=18,\ A=20$. Этот случай реализуется, например, если в 11А писали тест 2 учащихся и набрали 22 и 18 баллов, а в 11Б писали тест 49 учащихся и каждый набрал по три балла, а у перешедшего из 11А в 11Б учащегося 18 баллов.

Ответ: а) нет, б) нет, в) 3.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru