Досрочный ЕГЭ по математике Профильный уровень

(резервный день)

11 класс 17.04.2025

Примерный вариант 3

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№14. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равны $2\sqrt{14}$. Точка $K-$ середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

№15. Решите неравенство $\frac{14}{\left(4^{5-x^2}-2\right)^2} + \frac{1}{4^{5-x^2}-2} - 4 \geq 0$.

№16. В июле 2026 года планируется взять кредит в размере 9 млн. рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 25% от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь каждого года необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным 9 млн. рублей;
- платежи в 2030 и 2031 годах равны;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

№17. В трапеции $ABCD$ точка $E-$середина основания AD, точка $K-$середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DK пересекаются в точке O.

а) Доказать, что площади четырехугольника $AKOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите отношение площади четырехугольника $AKOE$ к площади трапеции $ABCD$, если $BC=3,\ AD=4$.

№18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 - xy - 7y + 5x + 10}{\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-y}} = 0 \\ 4a = ax - y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№19. В школе перед началом учебного года было сформировано несколько одиннадцатых классов, в каждом из которых количество мальчиков относилось к количеству девочек как 7:2 или 2:7. После этого в параллель одиннадцатых классов школы приняли ещё четырех мальчиков и трёх девочек.

а) Удастся ли теперь разбить всех одиннадцатиклассников на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 5:4 или 4:5?

б) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7:3 или 3:7. Могло ли при этом получиться ровно семь классов?

в) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7:3 или 3:7. Было решено отправить всех одиннадцатиклассников на экскурсию группами по 90 человек, при этом одна из групп оказалась неполной. Сколько в этой группе учеников?

▪ *Ответы*

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{5\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}$	*26*	$\left[-\sqrt{6};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\right]$; $\left[2;\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{6}\right]$	*19 250 000*	$\frac{2}{9}$	$\{-5\};\left[-\frac{5}{8};0\right]$; $\left[\frac{1}{4};\infty\right)$	*а) нет, б) да, в) 70.*

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

▪ *Решение*

№13. **а) Решите уравнение** $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$

$\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8 = 1$

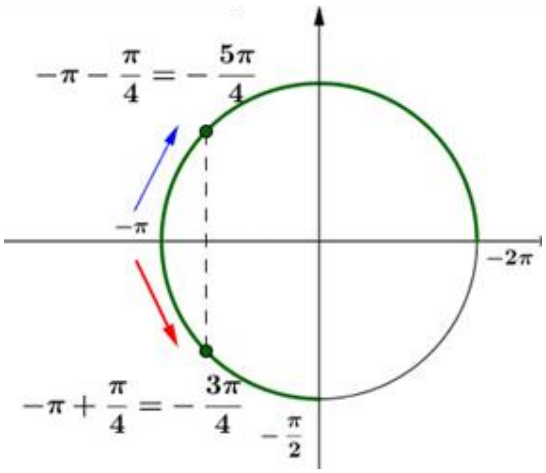
$2\cos^2 x - 1 - 9\sqrt{2}\cos x - 8 - 1 = 0$

$2\cos^2 x - 9\sqrt{2}\cos x - 10 = 0$

$D = 242, \quad \sqrt{D} = 11\sqrt{2},$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos x = 5\sqrt{2}, \ \varnothing$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



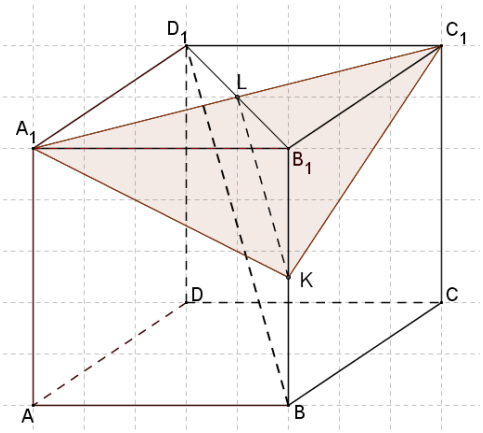
б) Корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad x_1 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}, \quad x_2 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$; *б)* $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

№14. **Основанием прямой четырехугольной призмы** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **является квадрат** $ABCD$ **со стороной** $5\sqrt{2}$**, высота призмы равны** $2\sqrt{14}$**. Точка** $K-$ **середина ребра** BB_1**. Через точки** K **и** C_1 **проведена плоскость** α**, параллельная прямой** BD_1**.**

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α **является равнобедренным треугольником.**

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α **.**



Решение:

а) В треугольнике BB_1D_1 проведем среднюю линию KL. Точка L лежит в плоскости α, поскольку $KL \parallel BD_1$.

В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ точка L - середина диагонали B_1D_1, значит, она тоже является серединой диагонали A_1C_1, а искомым сечением является треугольник A_1KC_1. Прямоугольные треугольники A_1B_1K и C_1B_1K равны по двум катетам. Следовательно, $A_1K = C_1K$.

б) В прямоугольных треугольниках $A_1B_1C_1$ и C_1B_1K:

$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1C_1^2} = 10$ и $A_1K = C_1K = \sqrt{B_1C_1^2 + B_1K^2} = 8$

$P_{A_1KC_1} = 10 + 2\cdot 8 = 26$.

Ответ: 26.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№15. **Решите неравенство** $\dfrac{14}{\left(4^{5-x^2}-2\right)^2}+\dfrac{1}{4^{5-x^2}-2}-4\ge 0$.

Решение:

$$4^{5-x^2}-2=t,\quad \frac{14}{t^2}+\frac{1}{t}-4\ge 0,\quad \frac{-4t^2+t+14}{t^2}\ge 0$$

$$\frac{(t-2)(t+1,75)}{t^2}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1,75\le t\le 2\\ t\ne 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-1,75\le 4^{5-x^2}-2\le 2\\ 4^{5-x^2}-2\ne 0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{1}{4}\le 4^{5-x^2}\le 4\\ 2^{10-2x^2}\ne 2^1\end{cases},\quad \begin{cases}4^{-1}\le 4^{5-x^2}\le 4^1\\ 10-2x^2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-1\le 5-x^2\le 1\\ 2x^2\ne 9\end{cases},\quad \begin{cases}4\le x^2\le 6\\ x\ne\frac{3}{\sqrt{2}},\ x\ne-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{cases},\quad \begin{cases}-\sqrt{6}\le x\le -2,\ 2\le x\le\sqrt{6}\\ x\ne\frac{3}{\sqrt{2}},\ x\ne-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Ответ: $\left[-\sqrt{6};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\right];\left[2;\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{6}\right]$.

№16. **В июле 2026 года планируется взять кредит в размере 9 млн. рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:**

- **в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 25% от суммы долга на конец предыдущего года;**
- **в период с февраля по июнь каждого года необходимо одним платежом оплатить часть долга;**
- **в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остается равным 9 млн. рублей;**
- **платежи в 2030 и 2031 годах равны;**
- **к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.**

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Решение:

Пусть выплаты с февраля по июнь в 2030 и 2031 годах составляют по X млн. рублей.

Год	*Долг с начисленными процентами на январь*	*Выплаты с февраля по июнь*	*Долг в июле*
2026			9
2027	$1,25\cdot 9$	$1,25\cdot 9-9=0,25\cdot 9$	9
2028	$1,25\cdot 9$	$1,25\cdot 9-9=0,25\cdot 9$	9
2029	$1,25\cdot 9$	$1,25\cdot 9-9=0,25\cdot 9$	9
2030	$1,25\cdot 9$	X	$1,25\cdot 9-X$
2031	$1,25(1,25\cdot 9-X)$	X	$1,25(1,25\cdot 9-X)-X=0$

Последний платеж должен погасить долг по кредиту полностью, поэтому $1,25(1,25\cdot 9-X)-X=0$,

$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\cdot 9-X\right)-X=0$, откуда $X=\frac{225}{36}$, а выплаты по кредиту равны

$3\cdot 0,25\cdot 9+2X=6,75+2\cdot\frac{225}{36}=6,75+12,5=19,25$ мл. рублей.

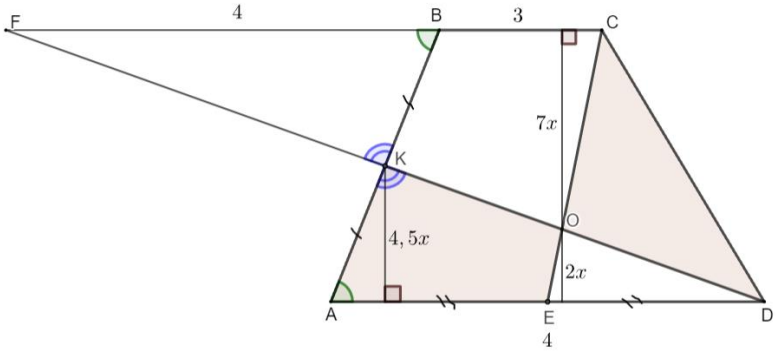
Ответ: 19 250 000 рублей.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№17. **В трапеции $ABCD$ точка $E-$середина основания AD, точка $K-$середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DK пересекаются в точке O.**

а) Доказать, что площади четырехугольника $AKOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите отношение площади четырехугольника $AKOE$ к площади трапеции $ABCD$, если $BC=3,\ AD=4$.



Решение:

а) Пусть $h-$высота трапеции, а, значит, высота треугольника CED. Поскольку $K-$середина AB, то высота треугольника AKD, опущенная из вершины K, равна $\frac{h}{2}$.

Обозначим $AE=ED=a$,

тогда $S_{\Delta AKD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot 2a=\frac{ah}{2}$ и $S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot ED=\frac{1}{2}\cdot h\cdot a=\frac{ah}{2}$. Получили, что $S_{\triangle AKD}=S_{\triangle CED}$.

В свою очередь, $S_{\triangle AKD}=S_{AKOD}+S_{\triangle OED}$ и $S_{\triangle CED}=S_{\triangle COD}+S_{\triangle OED}$, тогда $S_{AKOD}=S_{\triangle COD}$.

б) Продлим отрезок DK до пересечения с продолжением стороны трапеции BC. Обозначим точкой F их точку пересечения.

В треугольниках BKF и AKD имеем $AK=KB$ по условию, $\angle BKF=\angle AKD$ как вертикальные, $\angle FBK=\angle DAK$ как накрест лежащие при $BC\parallel AD$ и секущей AB. Следовательно, $\triangle BKF=\triangle AKD$, тогда $AD=BF$.

$AD=BF=4$, $ED=\frac{AD}{2}=2$ и $FC=BC+BF=3+4=7$. Треугольники OCF и OED подобны по двум углам, а именно, $\angle CFO=\angle ODE$ как накрест лежащие при $BF\parallel ED$ и секущей DF и $\angle COF=\angle EOD$ как вертикальные, тогда имеем $\frac{ED}{FC}=\frac{2}{7}$. Значит и высоты этих треугольников относятся так же. Высота трапеции $h=2x+7x=9x$, а высота треугольника AKD, опущенная из вершины K равна $4{,}5x$.

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot h=\frac{4+3}{2}\cdot 9x=\frac{63x}{2}.$$

$$S_{AKOD}=S_{AKD}-S_{OED}=\frac{1}{2}\cdot 4{,}5x\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2=9x-2x=7x.$$

$$\frac{S_{AKOD}}{S_{ABCD}}=7x:\frac{63x}{2}=\frac{7\cdot 2}{63}=\frac{2}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{9}$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№18. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2-xy-7y+5x+10}{\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-y}}=0 \\ 4a=ax-y \end{cases}$$ **имеет единственное решение.**

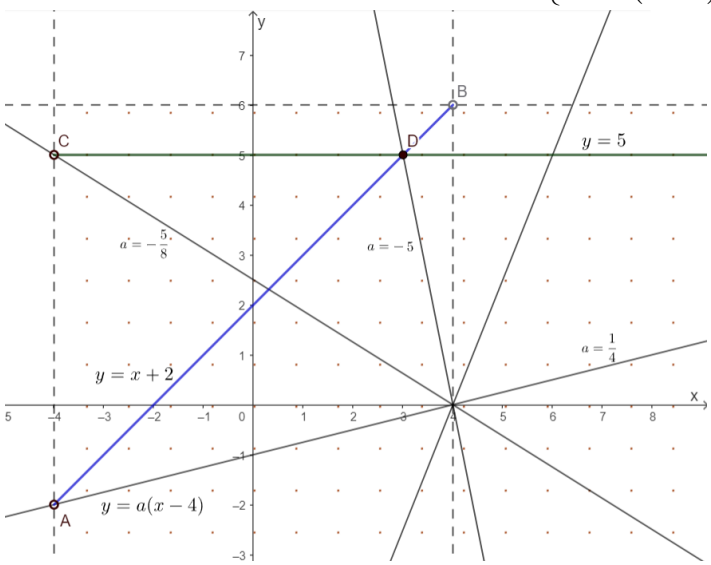
Решение:

$$\begin{cases} y^2-7y+10-xy+5x=0 \\ x+4>0 \\ 6-y>0 \\ y=ax-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-5)(y-2)-x(y-5)=0 \\ x>-4 \\ y<6 \\ y=a(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-5)(y-2-x)=0 \\ x>-4 \\ y<6 \\ y=a(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=x+2 \end{array}\right. \\ x>-4 \\ y<6 \\ y=a(x-4) \end{cases}$$

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения линий графиков $y=5,\ y=x+2$ с прямой $y=a(x-4)$ при условии, что $x>-4$ и $y<6$ (выделенная область на рисунке).

Прямая $y=a(x-4)$ проходит через точку $(4;0)$ и имеет изменяющийся угловой коэффициент a.

Если $a=0$, то прямая $y=a(x-4)$ параллельная прямой $y=5$, поэтому общих точек нет, а прямую $y=x+2$ она пересекает в заданной область. При $a=0$ система уравнений имеет одно решение.



Прямая $y=a(x-4)$ проходит через точку $A(-4;-2)$ при $-2=a(-4-4)$, $a=\dfrac{1}{4}$.

И она пересекает обе прямые $y=x+2$ и $y=5$ в заданной области, но $x\neq-4$, значит, точка $A-$выколота.

При $a=\dfrac{1}{4}$ система уравнений имеет одно решение, при $0<a<\dfrac{1}{4}$ два решения.

При $a>\dfrac{1}{4}$ прямая $y=a(x-4)$ пересекает прямую $y=5$, и не имеет общих точек с прямой $y=x+2$.

Значит, система уравнений при $a>\dfrac{1}{4}$ имеет одно решение.

Прямая $y=a(x-4)$ проходит через точку $C(-4;5)$ при $5=a(-4-4)$, $a=-\dfrac{5}{8}$. И она пересекает обе прямые $y=x+2$ и $y=5$ в заданной области, но $x\neq-4$, значит, точка $C-$выколота.

При $-\dfrac{5}{8}\le a\le 0$ система уравнений имеет одно решение.

Найдем координаты точки $D:\begin{cases} y=5 \\ y=x+2 \end{cases}$, $D(3;\ 5)$. Прямая $y=a(x-4)$ проходит через нее при $5=a(3-4)$, $a=-5$ и система имеет единственное решение.

При $a<-5$ и $-5<a<-\dfrac{5}{8}$ два решения.

Ответ: при $a\in\{-5\}\cup\left[-\dfrac{5}{8};0\right]\cup\left[\dfrac{1}{4};\infty\right)$ *система уравнений имеет единственное решение.*

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№19. В школе перед началом учебного года было сформировано несколько одиннадцатых классов, в каждом из которых количество мальчиков относилось к количеству девочек как 7:2 или 2:7. После этого в параллель одиннадцатых классов школы приняли ещё четырех мальчиков и трёх девочек.

а) Удастся ли теперь разбить всех одиннадцатиклассников на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 5:4 или 4:5?

б) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7:3 или 3:7. Могло ли при этом получиться ровно семь классов?

в) Всех одиннадцатиклассников удалось разбить на классы так, чтобы в каждом классе отношение количества мальчиков к количеству девочек было 7:3 или 3:7. Было решено отправить всех одиннадцатиклассников на экскурсию группами по 90 человек, при этом одна из групп оказалась неполной. Сколько в этой группе учеников?

Решение:

Поскольку в классах отношение количества мальчиков к количеству девочек равно 7:2 или 2:7, то общее количество учащихся в классе составляет 9 частей, т. е. количество учащихся класса делится на 9. В школе такое соотношение выполняется для каждого из одиннадцатых классов, это значит, что общее количество одиннадцатиклассников в школе тоже делится на 9. Пусть общее количество учащихся одиннадцатых классов в школе было $9n$, где $n \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}$. Когда в параллель одиннадцатых классов приняли ещё четырех мальчиков и трёх девочек, то там стало $(9n+7)$ учащихся.

а) По условию отношение количества мальчиков к количеству девочек в классе должно быть 5:4 или 4:5, значит, общее количество учащихся в классе составляет 9 частей, т. е. количество учащихся класса делится на 9. Поскольку учащихся всех одиннадцатых классов школы разбивают в таком отношении, тогда общее количество учащихся одиннадцатиклассников в школе тоже делится на 9. Значит, $(9n+7)$ должно делиться без остатка на 9: $\frac{9n+7}{9} = \left(n + \frac{7}{9}\right) \notin \mathbb{N}$. Учащихся во всех одиннадцатых классах невозможно разбить в отношении 5:4 или 4:5.

б) Приведем пример.

Количество классов	Было	Добавили в класс	Стало
	2:7	Всего 4 мальчика	3:7
1	2м+7д	1м	3м+7д
2	2м+7д	1м	3м+7д
3	2м+7д	1м	3м+7д
4	2м+7д	1м	3м+7д
	7:2	Всего 3 девочки	7:3
5	7м+2д	1д	7м+3д
6	7м+2д	1д	7м+3д
7	7м+2д	1д	7м+3д

Да, могло получиться 7 классов.

в) Поскольку в классах отношение количества мальчиков к количеству девочек равно 7:3 или 3:7, то общее количество учащихся в классе составляет 10 частей, т. е. количество учащихся класса делится на 10. В школе такое соотношение выполняется для каждого из одиннадцатых классов, это значит, что общее количество учащихся одиннадцатиклассников в школе тоже делится на 10. Пусть общее количество учащихся одиннадцатых классов в школе было $10k$, где $k \geq 2$ и $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, это количество учащихся в школе равно $(9n+7)$, значит, запишем равенство $9n+7=10k$.

Пусть на экскурсию отправилось a ($a \in \mathbb{N}$) групп по 90 человек и одна группа оказалась неполной в x человек, причем $x<90$. Тогда общее количество учащихся одиннадцатых классов школы можно записать как $(90a+x)$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 90a+x=9n+7 \\ 90a+x=10k \end{cases}, \quad \begin{cases} 10a+\dfrac{x}{9}=n+\dfrac{7}{9} \\ 9a+\dfrac{x}{10}=k \end{cases} \; -\downarrow, \; a+\frac{x}{90}=n-k+\frac{7}{9}, \; a+\frac{x}{90}-\frac{7}{9}=n-k, \; a+\frac{x-70}{90}=n-k.$$

В полученном уравнении $a+\dfrac{x-70}{90}=n-k$ a, n, k - это целые числа, значит, и дробь $\dfrac{x-70}{90}$ должна принимать целые значения при условии, что $x<90$. Числитель $(x-70)$ должен делиться на 90 без остатка, а это возможно только при $x=70$. Значит, в неполной группе 70 учеников.

Ответ: а) нет, б) да, в) 70.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru