

## Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

## ■ Примеры

№1. Найти наименьшее расстояние от точки  $A(-4;4)$  до окружности  $x^2 + y^2 - 2x + 16y + 56 = 0$ .

---

№2. При каких значениях параметра  $a$  система  $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4 \\ y = 3 - |x| \end{cases}$  имеет ровно два решения?

---

№3. При каких значениях параметра  $a$  система  $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 4 \\ |y| = x \end{cases}$  имеет ровно два решения?

---

№4. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$  имеет ровно три решения.

---

№5. Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$  имеет единственное решение.

---

№6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} (x-3a+1)^2 + (y+2a)^2 = a-1 \\ 4x + 3y = a+1 \end{cases}$  имеет более одного решения.

---

№7. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = |1,6a| \\ y = ax - a^2 \end{cases}$  имеет ровно два различных решения.

---

№8. Найдите все значения параметра, при которых система уравнений  $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$  имеет ровно два решения?

№9. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0 \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x-y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

№10. При каком значении  $a$  радиус окружности, вписанную в фигуру, заданную уравнением

$$3|x-2| = a - |y|, \text{ равен } \sqrt{10}?$$

№11. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 6 \\ x^2 + (y-a)^2 = 1 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

№12. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2|xy - 3y - 4x + 12| = a^2 + 2a - z - 30 \\ 3a^2 - a - z - 32 = 0 \\ z - x^2 - y^2 + 6x + 8y = 0 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения.}$$

№13. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = \sqrt{x+4} \end{cases} \text{ имеет ровно три различных решения.}$$

№14. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{x})^4 - 3 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№15. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{-x})^4 - 5 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№16. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система 
$$\begin{cases} 3|x-2a| + 2|y-a| = 6 \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

№17. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} |x-a| + |y| = 2 \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

▪ **Ответы (примеры)** Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1	№2	№3	№4	№5
10	$(1; 5); \{3 - 2\sqrt{2}\}$	$(-2; 2); \{2\sqrt{2}\}$	$9 - 5\sqrt{2}; 4; 5\sqrt{2} - 1$	$2, 6$ и $(\sqrt{10}; \sqrt{17}]$
№6	№7	№8	№9	№10
$(1; 2)$	$(-2; 0); (0; 2)$	$\pm 0, 2$	$-\frac{16}{7}; -2; 0; 2$	10
№11	№12	№13	№14	№15
$(-3; -1); \left\{ \frac{-6 + \sqrt{13}}{3} \right\};$ $(1; 3); \left\{ \frac{6 - \sqrt{13}}{3} \right\}$	1, 8 и 2	$\left[ 4; \frac{17}{4} \right)$	$(\sqrt{3}; 3)$ и $\left\{ \frac{13}{4} \right\}$	$(\sqrt{5}; 5)$ и $\left\{ \frac{21}{4} \right\}$
№16	№17			
$2; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}; 0$	$[-4; 2 - 2\sqrt{2});$ $(-2 + 2\sqrt{2}; 4]$			

▪ **Тест** Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ |y - a| - x = 5 \end{cases}$  имеет четыре решения.

№2. Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} 8x - 15y = 36 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$  имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} (x + 2a)^2 + (y + 3a + 1)^2 = a + 1 \\ 3x - 4y = a - 1 \end{cases}$  имеет более одного решения.

№4. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = |2,7a| \\ y = a(x - a) \end{cases}$  имеет ровно два различных решения.

№5. Найдите все значения параметра, при которых система уравнений  $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 10a^4 \end{cases}$  имеет ровно два решения?

№6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} y(y + 1) \leq 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6a(x + y) + 5a^2 - 6x + 4a + 3 = 0 \end{cases}$  имеет единственное решение.

№7. При каком значении  $a$ , радиус окружности, вписанной в фигуру, заданную уравнением  $|x| + 2|y - 1| = a$ , равен  $2\sqrt{5}$ ?

№8. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$  имеет наибольшее число решений.

№9. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = \sqrt{9 - x} \end{cases}$  имеет ровно два различных решения.

№10. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = 6 - (\sqrt{x})^4 \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

№11. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ y = (\sqrt{x})^4 - 7 \end{cases} \text{ имеет ровно три различных решения.}$$

№12. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система  $\begin{cases} |x - a| + 2|y - a| = 5 \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}$  имеет ровно три различных решения.

▪ **Ответы (тест)**      Графические и геометрические приемы решения систем рациональных уравнений

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$(5 - 4\sqrt{2}; -5 + 4\sqrt{2})$	$\frac{36}{17}; (5; 4\sqrt{10}]$	$(-1; 0)$	$(-3; 0); (0; 3)$	$\pm 0, 2$	$0 \text{ и } 1$
№7	№8	№9	№10	№11	№12
10	$(\frac{144}{13}; 16)$	$(3; 9); \{\frac{37}{4}\}$	$(\sqrt{6}; 6); \{\frac{25}{4}\}$	$[7; \frac{29}{4})$	$-1, 5; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 3, 5$

Справочные материалы

- ✓ Уравнение окружности  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ ,  $(x_0; y_0)$  – координаты центра,  $R$  – радиус.
- ✓ Расстояние между точками  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ :  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .
- ✓ Расстояние от точки  $M(x_M; y_M)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ :

$$\rho(M; Ax + By + C = 0) = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$