

Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

■ Примеры

№1. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = 2(2x + y) \\ a^2 + ax + 2ay = 5 \end{cases}$$
 имеет решение.

№2. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 2x^2 + 3y^2 \\ -x + 2y + 3z = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x - 2a + 2)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{5}{2} \\ x + y = 1 - a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) - ax + (a - 3)y + 1 = 0 \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = (a + 2)x^2 + 2ax + a - 2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y = \left| y - 2 + \frac{3}{x} \right| \\ 2y(y - 4) + 3x(ax + 4) = xy(2a + 3) \end{cases}$$
 имеет больше трех решений.

№8. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = (a + 2)x^2 + 2ax + a - 1 \\ x = (a + 2)y^2 + 2ay + a - 1 \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

№9. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$$
 имеет единственную пару решений.

№10. Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

№11. Найти все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№12. Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8|x-y| + 8|a| \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет нечетное число различных решений.

№13. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (|x| - a^2)^2 + (y - 4a)(y + 4a) = 9a^2 - 2y - 1 \\ y + 1 = 6\sqrt{a} \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

№14. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2 - x = 4 - 2a \\ y^4 + x^2 = a^2 - 3a + 4 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

▪ **Ответы (примеры)** Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
$-5; 1$	$-25/36$	$-0,5$ и 2	$(-\infty; 0);$ $(16; \infty)$	$\left(-\frac{17}{4}; -2\right);$ $(-2; 2);$ $\left(2; \frac{17}{4}\right)$	$(-0,5; 1 - \sqrt{2});$ $(1 + \sqrt{2}; \infty)$	$\left(-\frac{9}{16}; -\frac{1}{2}\right);$ $\left(-\frac{1}{2}; 0\right);$ $(0; 2); (2; \infty)$
№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14
$-2; \frac{9}{8}$	-2	$\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$	$\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$	$\{-16; 0; -16\}$	$(\sqrt{13} - 2; 4);$ $\left\{\frac{36}{25}\right\}$	$\{1\} \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right)$

■ **Тест** Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10 = 2(x + 3y) \\ a^2 + 2ax + ay = -6 \end{cases}$ имеет решение.

№2. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x + y + 2z = 4x^2 + y^2 \\ 2x + y + 3z = -a \end{cases}$ имеет единственное решение.

№3. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (x - a + 3)^2 + (y + a - 2)^2 = a + \frac{7}{2} \\ x - y = a - 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)(x^2 + y^2) + (a-1)x + (a+1)y + 2 = 0 \\ xy - 1 = x - y \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 - 1 \\ x^2 - y = |a - 1| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

№6. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y + 2 - \frac{4}{x} = \left| y + \frac{2}{x} - 3 \right| \\ 2y(y + 2) + 3x(ax - 2) = xy(2a + 3) \end{cases}$ имеет больше трех решений.

№7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = (a+2)x^2 - (2a+1)x + a - 3 \\ x = (a+2)y^2 - (2a+1)y + a - 3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№8. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 10xy = 0 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

№9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

№10. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6|x - y| + 6|a| \\ x + y = a \end{cases}$ имеет нечетное число различных решений.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

№11.
$$\begin{cases} (|x| + a^2)^2 + (y - 4a)(y + 4a) = 4y - 4 \\ 0,5y - 1 = \sqrt{6a} \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

№12. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y^2 - x = 2a + 8 \\ y^4 + x^2 = a^2 - 5a - 6 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

▪ **Ответы (тест)** Аналитические приемы решения систем рациональных уравнений с параметром

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$-3; -2$	$-\frac{5}{96}$	$1 \text{ и } 9$	$(-3; -1)$	$(-\infty; -3)$	$\left(-\frac{25}{16}; -1,5\right); (-1,5; 0); \left(0; \frac{19}{6}\right); \left(\frac{19}{6}; \infty\right)$
№7	№8	№9	№10	№11	№12
$-\frac{7}{3}; -2$	$-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}$	2	$0; 12; -12$	$(2; \sqrt{13} - 1)$	$\left(-\frac{7}{3}; -2\right)$