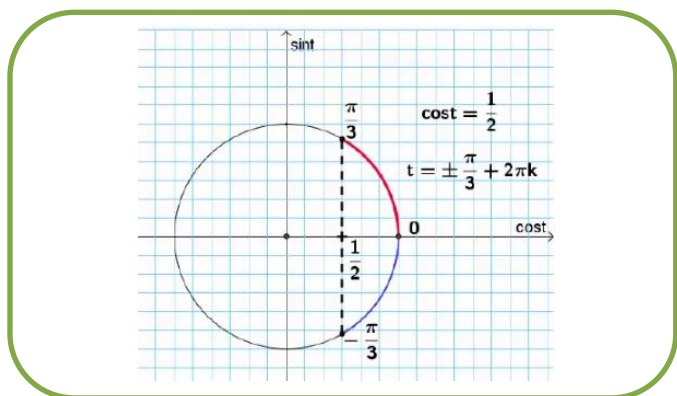




Открытый банк задач ЕГЭ по
Математике

<https://prof.mathege.ru/>

Примеры с решением

Тесты с ответами

Тема 7. Тригонометрические функции

Задания 7, 8, 10, 12

Содержание сборника:

1. Задание 8. Тригонометрические выражения	
1_1. Табличные значения	2
1_2. Тригонометрические функции числового аргумента	5
1_3. Преобразования тригонометрических выражений	8
1_4. Формулы двойного угла	11
1_5. Формулы приведения	15
2. Задание 7. Простейшие тригонометрические уравнения	20
3. Задание 10. Прикладные задачи. Тригонометрические уравнения или неравенства	27
4. Задание 12. График тригонометрических функции	36
Справочный материал	39

1. Преобразование тригонометрических выражений

1_1. Табличные значения

■ Примеры

Найдите значение выражения:

№1. $20 \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ$

№2. $18 \sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$

№3. $-15\sqrt{2} \cos 405^\circ$

№4. $-32\sqrt{3} \operatorname{tg}(-600^\circ)$

№5. $-11\sqrt{2} \sin(-585^\circ)$

№6. $38\sqrt{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$

№7. $16\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{4}$

№8. $46\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

№9. $\frac{28}{\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)}$

■ **Решение (примеры)** 1_1. Табличные значения

$$\text{№1.} \quad 20 \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10$$

$$\text{№2.} \quad 18 \sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4,5$$

$$\text{№3.} \quad -15\sqrt{2} \cos 405^\circ = -15\sqrt{2} \cos(360^\circ + 45^\circ) = -15\sqrt{2} \cos 45^\circ = -15\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -15$$

$$\begin{aligned} \text{№4.} \quad & -32\sqrt{3} \operatorname{tg}(-600^\circ) = 32\sqrt{3} \operatorname{tg} 600^\circ = 32\sqrt{3} \operatorname{tg}(2 \cdot 360^\circ - 120^\circ) = 32\sqrt{3} \operatorname{tg}(-120^\circ) = \\ & = -32\sqrt{3} \operatorname{tg} 120^\circ = -32\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = 96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№5.} \quad & -11\sqrt{2} \sin(-585^\circ) = 11\sqrt{2} \sin 585^\circ = 11\sqrt{2} \sin(360^\circ + 225^\circ) = 11\sqrt{2} \sin(180^\circ + 45^\circ) = \\ & = 11\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -11 \end{aligned}$$

$$\text{№6.} \quad 38\sqrt{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 38\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 114$$

$$\text{№7.} \quad 16\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{4} = 16\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8$$

$$\text{№8.} \quad 46\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 46\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -23$$

$$\begin{aligned} \text{№9.} \quad & \frac{28}{\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)} = \frac{28}{-\sin\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{28}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{28}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} = \\ & = -\frac{28}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -56 \end{aligned}$$

■ Тест

1_1. Табличные значения

Вариант 1

Вариант 2

Найдите значение выражения:

№1. $10 \sin 150^\circ \cdot \cos 60^\circ$

№1. $2 \sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$

№2. $33\sqrt{2} \cos 495^\circ$

№2. $27\sqrt{2} \cos(-675^\circ)$

№3. $-17\sqrt{3} \operatorname{tg}(1050^\circ)$

№3. $24\sqrt{3} \operatorname{tg}(-1020^\circ)$

№4. $14\sqrt{2} \sin(-675^\circ)$

№4. $-22\sqrt{2} \sin(-315^\circ)$

№5. $54\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

№5. $36\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

№6. $46\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{7\pi}{4}$

№6. $22\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{6}$

№7. $8\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

№7. $34\sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

№8. $\frac{43}{\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{35\pi}{3}\right)}$

№8. $\frac{23}{\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{23\pi}{3}\right)}$

■ Ответы (тест)

1_1. Табличные значения

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
Вар.1	2,5	-33	17	14	27	69	-4	-172
Вар.2	-0,5	27	72	-22	54	-33	-51	92

1_2. Тригонометрические функции числового аргумента

Примеры

Найдите

$$\begin{array}{ll} \text{№1.} & \cos \alpha = ?, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10} \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \text{№2.} & \sin \alpha = ?, \text{ если } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№3.} & \operatorname{tg} \alpha = ?, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26} \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \text{№4.} & \operatorname{tg} \alpha = ?, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}} \text{ и } \alpha \in (1,5\pi; 2\pi) \end{array}$$

Решение (примеры) 1_2. Тригонометрические функции числового аргумента

$$\text{№1.} \quad \cos \alpha = ?, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10} \text{ и } \alpha \in (\pi; 1,5\pi)$$

Решение:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in (\pi; 1,5\pi) \text{ III четв. } \cos \alpha < 0$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3\sqrt{11}}{10}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{99}{100}} = -\sqrt{\frac{1}{100}} = -\frac{1}{10} = -0,1$$

Ответ: -0,1.

$$\text{№2.} \quad \sin \alpha = ?, \text{ если } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$$

Решение:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \alpha \in (1,5\pi; 2\pi) \text{ IV четв. } \sin \alpha < 0$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Ответ: -0,5.

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Решение:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ III четв. } \sin \alpha < 0$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{26}} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}\right) = \frac{1}{5} = 0,2$

Ответ: 0,2.

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$

Решение:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in (1,5\pi; 2\pi) \text{ IV четв. } \cos \alpha > 0$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{26}} : \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) = -\frac{1}{5} = -0,2$

Ответ: -0,2.

■ Тест

1_2. Тригонометрические функции числового аргумента

Вариант 1

Вариант 2

Найдите значение выражения:

№1. $\cos \alpha = ?$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$

№2. $\sin \alpha = ?$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{101}}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$

№1. $3 \cos \alpha = ?$, если $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$

№2. $\sin \alpha = ?$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{91}}{10}$ и $\alpha \in (\pi; 1, 5\pi)$

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$

■ Ответы (тест)

1_2. Тригонометрические функции числового аргумента

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	-0,2	-0,2	-0,6	-0,1
Вар.2	1	-0,3	-0,5	-0,2

1_3. Преобразования тригонометрических выражений

Примеры

Найдите

№1. $\frac{7 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$

№2. $\frac{2 \cos \alpha - 10 \sin \alpha + 10}{5 \sin \alpha - \cos \alpha + 5} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{3 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{7 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 1$

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha + 1}{6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 2} = \frac{1}{2}$

№5. $\operatorname{tg}^2 \alpha = ?$, если $5 \sin^2 \alpha + 11 \cos^2 \alpha = 10$

Решение (примеры) 1_3. Преобразования тригонометрических выражений

№1. $\frac{7 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$

Решение:

1) $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$, $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$

2) $\frac{7 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha - 7 \cdot 3 \cos \alpha}{2 \cdot 3 \cos \alpha + 4 \cos \alpha} = \frac{7 - 21}{6 + 4} = -1,4$

Ответ: -1,4.

№2. $\frac{2 \cos \alpha - 10 \sin \alpha + 10}{5 \sin \alpha - \cos \alpha + 5} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$

Решение:

1) $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{10}$, $10 \sin \alpha = 2 \cos \alpha$, $\cos \alpha = 5 \sin \alpha$

2) $\frac{2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 10}{\cos \alpha - \cos \alpha + 5} = \frac{10}{5} = 2$

Ответ: 2.

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{3 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{7 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 1$

Решение:

$\frac{3 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{7 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 1$, $3 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 7 \sin \alpha - 17 \cos \alpha$, $20 \cos \alpha = 4 \sin \alpha$, $5 = \operatorname{tg} \alpha$

Ответ: 5.

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha + 1}{6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 2} = \frac{1}{2}$

Решение:

$$\frac{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha + 1}{6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 2} = \frac{1}{2}, \quad 4 \sin \alpha + 8 \cos \alpha + 2 = 6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 2, \quad 3 \cos \alpha = 2 \sin \alpha, \quad 1,5 = \operatorname{tg} \alpha$$

Ответ: 1,5.

№5. $\operatorname{tg}^2 \alpha = ?$, если $5 \sin^2 \alpha + 11 \cos^2 \alpha = 10$

Решение:

$$5 \sin^2 \alpha + 11 \cos^2 \alpha = 10 \quad | : \cos^2 \alpha$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 11 = \frac{10}{\cos^2 \alpha} \quad \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 11 = 10(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 11 = 10 + 10 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad 1 = 5 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,2$$

Ответ: 0,2.

■ Тест

1_3. Преобразования тригонометрических выражений

Вариант 1

Вариант 2

Найдите

№1. $\frac{7 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$

№2. $\frac{6 \cos \alpha + 15 \sin \alpha + 10}{5 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 2} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = -0,4$

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{6 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = -1$

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha + 1}{4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 3} = \frac{1}{3}$

№5. $\operatorname{tg}^2 \alpha = ?$, если $3 \sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 8$

№1. $\frac{7 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$

№2. $\frac{10 \cos \alpha + 4 \sin \alpha + 6}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3} = ?$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$

№3. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{2 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 16 \cos \alpha} = 4$

№4. $\operatorname{tg} \alpha = ?$, если $\frac{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha - 2}{4 \sin \alpha + 5 \cos \alpha - 8} = \frac{1}{4}$

№5. $\operatorname{tg}^2 \alpha = ?$, если $4 \sin^2 \alpha + 7 \cos^2 \alpha = 6$

■ Ответы (тест)

1_3. Преобразования тригонометрических выражений

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар. 1	-0,625	5	0,6	-0,5	0,2
Вар. 2	-1	2	10	-3,75	0,5

1_4. Формулы двойного угла

■ Примеры

Найдите значение выражения:

№1. Найдите $\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,7$

№2. а) $\frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin 280^\circ}$; б) $\frac{-10 \sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ}$; в) $\frac{12 \sin 114^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \cos 33^\circ}$.

№3. $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12}$

№4. а) $\frac{19(\sin^2 84^\circ - \cos^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ}$; б) $\sqrt{8} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{8} \sin^2 \frac{13\pi}{8}$.

№5. Найдите а) $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{7}$; б) $-37 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$.

№6. Найдите $-18 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

№7. а) $\sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12}$; б) $\sqrt{32} - \sqrt{128} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

■ Решение (примеры)

1_4. Формулы двойного угла

№1. Найдите $\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,7$.

$$\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot \sin(2 \cdot 2\alpha)}{7 \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{7 \cos 2\alpha} = \frac{4 \cdot \sin 2\alpha}{7} = \frac{4 \cdot 0,7}{7} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

№2. а) $\frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin 280^\circ} = \frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin(2 \cdot 140^\circ)} = \frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{2 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ} = 22;$

Ответ: 22.

б) $\frac{-10 \sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ} = \frac{-10 \cdot \sin(2 \cdot 82^\circ)}{\sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ} = \frac{-10 \cdot 2 \cdot \sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ} = -20.$

Ответ: -

в) $\frac{12 \sin 114^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \cos 33^\circ} = \frac{12 \sin 2 \cdot 57^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \sin 57^\circ} = \frac{12 \cdot 2 \cdot \sin 57^\circ \cdot \cos 57^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \sin 57^\circ} = 24.$

Ответ: 24.

№3. $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12} = \frac{2}{2} \cdot \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2 \cdot 13\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{13\pi}{6} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25.

№4. а) $\frac{19(\sin^2 84^\circ - \cos^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19(\cos^2 84^\circ - \sin^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19 \cdot \cos(2 \cdot 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19 \cdot \cos 168^\circ}{\cos 168^\circ} = -19$

Ответ: -19.

б) $\sqrt{8} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{8} \sin^2 \frac{13\pi}{8} = \sqrt{8} \left(\cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sin^2 \frac{13\pi}{8} \right) = \sqrt{8} \cdot \cos \frac{2 \cdot 13\pi}{8} = \sqrt{8} \cdot \cos \frac{13\pi}{4} =$
 $= \sqrt{8} \cdot \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{8} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{8} \cos \frac{\pi}{4} = -\sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

Ответ: -2.

№5. Найдите: а) $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{7}$; б) $-37 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$.

а) $98 \cos 2\alpha = 98(2 \cos^2 \alpha - 1) = 98 \left(2 \cdot \left(\frac{5}{7} \right)^2 - 1 \right) = 98 \left(\frac{50}{49} - 1 \right) = 2$

Ответ: 2.

б) $-37 \cos 2\alpha = -37(2 \cos^2 \alpha - 1) = -37(2(-0,6)^2 - 1) = -37(0,72 - 1) = -37 \cdot (-0,28) =$
 $= (40 - 3) \cdot 0,28 = 11,2 - 0,84 = 10,36$

Ответ: 10,36.

№6. Найдите $-18\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

$$\begin{aligned} -18\cos 2\alpha &= -18(1 - 2\sin^2 \alpha) = -18(1 - 2 \cdot (-0,6)^2) = -18(1 - 0,72) = -18 \cdot 0,28 = \\ &= -0,28 \cdot (20 - 2) = -5,6 + 0,56 = -5,04 \end{aligned}$$

Ответ: -5,04.

№7. а)

$$\begin{aligned} \sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 12} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} = \sqrt{12} \left(2 \cos^2 \frac{13\pi}{12} - 1 \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{2 \cdot 13\pi}{12} = \\ &= \sqrt{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

б)

$$\begin{aligned} \sqrt{32} - \sqrt{128} \sin^2 \frac{3\pi}{8} &= \sqrt{32} - \sqrt{32 \cdot 4} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \sqrt{32} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{32} \cdot \cos \frac{2 \cdot 3\pi}{8} = \\ &= \sqrt{32} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{32} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{64}}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{aligned}$$

Ответ: -4.

Тест

1_4. Формулы двойного угла

Вариант 1

№1. Найдите $\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = -0,7$.

№2. $\frac{42 \sin 77^\circ \cdot \cos 77^\circ}{\sin 154^\circ}$

№3. $\frac{-13 \sin 170^\circ}{\sin 85^\circ \cdot \sin 5^\circ}$

№4. $\frac{-20 \sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$

№5. $\sin \frac{23\pi}{12} \cdot \cos \frac{23\pi}{12}$

№6. $\frac{31(\sin^2 73^\circ - \cos^2 73^\circ)}{\cos 146^\circ}$

№7. $\sqrt{32} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$

№8. Найдите $-20 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$.

№9. Найдите $147 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{7}$.

№10. Найдите $-25 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,8$.

№11. $\sqrt{12} \cos^2 \frac{17\pi}{12} - \sqrt{3}$

№12. $\sqrt{75} - \sqrt{300} \sin^2 \frac{13\pi}{12}$

Вариант 2

№1. Найдите $\frac{3 \sin 4\alpha}{5 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0,4$.

№2. $\frac{16 \sin 142^\circ \cdot \cos 142^\circ}{\sin 284^\circ}$

№3. $\frac{-16 \sin 156^\circ}{\sin 78^\circ \cdot \sin 12^\circ}$

№4. $\frac{20 \sin 142^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 19^\circ}$

№5. $5\sqrt{2} \sin \frac{9\pi}{8} \cdot \cos \frac{9\pi}{8}$

№6. $\frac{6(\sin^2 68^\circ - \cos^2 68^\circ)}{\cos 136^\circ}$

№7. $\sqrt{27} \cos^2 \frac{7\pi}{12} - \sqrt{27} \sin^2 \frac{7\pi}{12}$

№8. Найдите $-15 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,3$.

№9. Найдите $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{6}{7}$.

№10. Найдите $-44 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,5$.

№11. $\sqrt{200} \cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sqrt{50}$

№12. $\sqrt{12} - \sqrt{48} \sin^2 \frac{17\pi}{12}$

Ответы (тест)

1_4. Формулы двойного угла

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Вар.1	-0,84	21	-26	-40	-0,25	-31	-4	5,6	-93	-7	-1,5	7,5
Вар.2	-0,48	8	-32	40	2,5	-6	-4,5	-12,3	46	22	5	-3

1_5. Формулы приведения

▪ Примеры

Найдите значение выражения:

№1. $\frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$

№2. $7 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ$

№3. $\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$

№4. $-11 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,96$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$

№5. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 25$.

№6. Найдите значение выражения $5 \cos(2\pi + \beta) + 4 \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{3}$

№7. Найдите значение выражения: а) $27\sqrt{2} \cos(-675^\circ)$; б) $\frac{60}{\sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}$.

$$\text{№1.} \quad \frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ} = \frac{14 \sin 19^\circ}{-\sin 19^\circ} = -14$$

$$1) \sin 341^\circ = \sin(360^\circ - 19^\circ) = \sin(-19^\circ) = -\sin 19^\circ$$

Ответ: - 14.

$$\text{№2.} \quad 7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ = 7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 13^\circ) = 7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ = 7$$

Ответ: 7.

$$\text{№3.} \quad \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ} = \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = \frac{12}{1} = 12$$

$$1) \cos^2 207^\circ = \cos^2(180^\circ + 27^\circ) = (\cos(180^\circ + 27^\circ))^2 = (-\cos 27^\circ)^2 = \cos^2 27^\circ$$

Ответ: 12.

$$\text{№4.} \quad -11 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right), \text{ если } \sin \alpha = 0,96 \text{ и } \alpha \in (0, 5\pi; \pi).$$

Решение:

1) Применяем формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

2) Для нахождения $\cos \alpha$ используем основное тригонометрическое тождество и определяем знак косинуса во II четверти:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in II, \quad \cos \alpha < 0$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,96^2} = -\sqrt{(1 - 0,96)(1 + 0,96)} = -\sqrt{0,04 \cdot 1,96} = -0,2 \cdot 1,4 = -0,28$$

3) Находим значение выражения:

$$\begin{aligned} -11 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) &= -11 \cdot (-\cos \alpha) = 11 \cdot \cos \alpha = 11 \cdot (-0,28) = -(10 + 1) \cdot 0,28 = \\ &= -2,8 - 0,28 = -3,08 \end{aligned}$$

Ответ: -3,08.

$$\text{№5.} \quad \text{Найдите } \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 25.$$

Решение:

$$1) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = 25, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{25} = 0,04;$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha = -0,04.$$

Ответ: -0,04.

№6. Найдите значение выражения $5\cos(2\pi + \beta) + 4\sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{3}$.

Решение:

$$1) \cos(2\pi + \beta) = \cos \beta$$

$$2) \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$$

"-" III

$$3) 5 \cdot \cos \beta + 4 \cdot \cos \beta = 9 \cdot \cos \beta = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$$

Ответ: -3.

№7. Найдите значение выражения: а) $27\sqrt{2}\cos(-675^\circ)$; б) $\frac{60}{\sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}$.

Решение:

$$а) \cos(-675^\circ) = \cos 675^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$27 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$$

$$б) 1) \sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{32\pi}{3}\right) = -\sin\left(10\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{60}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-60 \cdot 4}{3} = -80.$$

Ответ: а) 27; б) -80.

■ Тест

1_5. Формулы приведения

Вариант 1

№1. Найдите значение выражения $\frac{4 \cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

№2. Найдите значение выражения $\frac{5 \operatorname{tg} 163^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ}$.

№3. Найдите значение выражения $5 \operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ$.

№4. Найдите значение выражения $\frac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

№5. Найдите $-20 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.

Вариант 2

№1. Найдите значение выражения $\frac{14 \sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

№2. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$.

№3. Найдите значение выражения $3 \cos(-\pi + \beta) + 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{2}$.

№4. Найдите значение выражения $\frac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$.

№5. Найдите $8 \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.

Вариант 3

№1. Найдите значение выражения $\frac{60}{\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)}.$

№2. Найдите значение выражения $24\sqrt{2} \cos(1035^\circ).$

№3. Найдите значение выражения $\frac{\cos(2\pi - \beta) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{2 \cos(\beta - \pi)}.$

№4. Найдите значение выражения $2 \operatorname{tg}(\pi + \gamma) + 2 \operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg} \gamma = 0,6$.

№5. Найдите $11 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,28$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

Вариант 4

№1. Найдите значение выражения $\frac{36}{\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}.$

№2. Найдите значение выражения $15\sqrt{2} \cos(-585^\circ).$

№3. Найдите значение выражения $\frac{3 \cos(-3\pi - \beta) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{5 \cos(\beta + 3\pi)}.$

№4. Найдите значение выражения $-5 \operatorname{tg}(-4\pi + \gamma) - 2 \operatorname{tg}(\gamma)$, если $\operatorname{tg} \gamma = 0,2$.

№5. Найдите $20 \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

■ Ответы (тест)

1_5. Формулы приведения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-4	-5	-5	12	19,2
Вар.2	14	-0,8	-1	6	6,4
Вар.3	80	24	0	0	10,56
Вар.4	-48	-15	0	-1,4	16

2. Простейшие тригонометрические уравнения

■ Примеры

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(4x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-3)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№3. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(8x+9)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение (примеры) 2. Простейшие тригонометрические уравнения

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(4x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение:

Ведём замену аргумента $t = \frac{\pi(4x-7)}{3}$.

Уравнение примет вид:

$$\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На окружности отметим точки с абсциссами равными $\frac{1}{2}$.

Вернемся к замене

$$\frac{\pi(4x-7)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad | : \pi$$

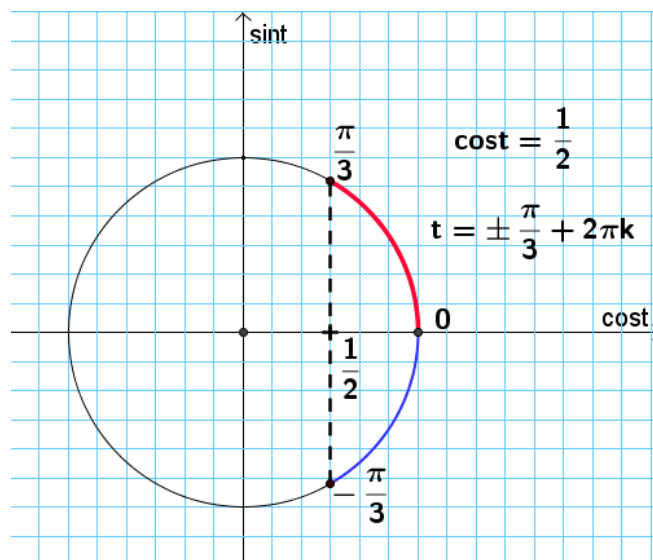
$$\frac{4x-7}{3} = \pm \frac{1}{3} + 2k \quad | \cdot 3$$

$$4x-7 = \pm 1 + 6k$$

$$\begin{cases} 4x = 1 + 7 + 6k \\ 4x = -1 + 7 + 6k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 8 + 6k \\ 4x = 6 + 6k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2}k \\ x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Т. к. $\mathbb{Z}$ - это множество целых чисел, то перебором, имеем:

$$k = -1 \quad x_1 = 2 + \frac{3}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1) = 0$$

Нет отрицательных чисел.

$$k = -2 \quad x_1 = 2 + \frac{3}{2} \cdot (-2) = 2 - 3 = -1$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-2) = \frac{3}{2} - 3 = -1,5$$

Наибольший отрицательный корень (-1).

Ответ: -1.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-3)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение:

Ведём замену аргумента $t = \frac{\pi(x-3)}{4}$.

Уравнение примет вид:

$$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

На окружности отметим точки с ординатами,

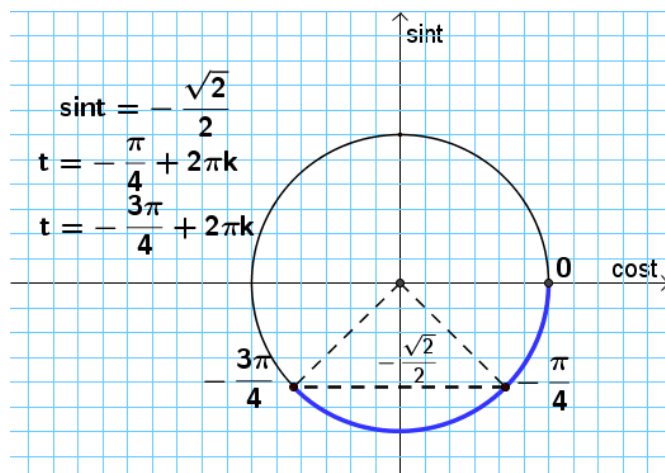
равными $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Вернемся к замене

$$\begin{cases} \frac{\pi(x-3)}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \cdot \frac{4}{\pi} \\ \frac{\pi(x-3)}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad \cdot \frac{4}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 = -1 + 8k \\ x-3 = -3 + 8k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 8k \\ x = 8k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Наименьший положительный ($x > 0$).

$$1) x = 2 + 8k > 0, \quad 8k > -2, \quad k > -0,25$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0 \quad \underline{x = 2}$$

$$2) x = 8k > 0, \quad k > 0$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1 \quad x = 8$$

Наименьший положительный корень: 2.

Ответ: 2.

№3. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(8x+9)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение:

Ведём замену аргумента $t = \frac{\pi(8x+9)}{3}$.

Уравнение примет вид:

$$\operatorname{tgt} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На оси тангенсов отметим значение $(-\sqrt{3})$.

Вернемся к замене

$$\frac{\pi(8x+9)}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k \quad \left| \cdot \frac{3}{\pi} \right.$$

$$8x+9 = -1+3k$$

$$8x = -10+3k$$

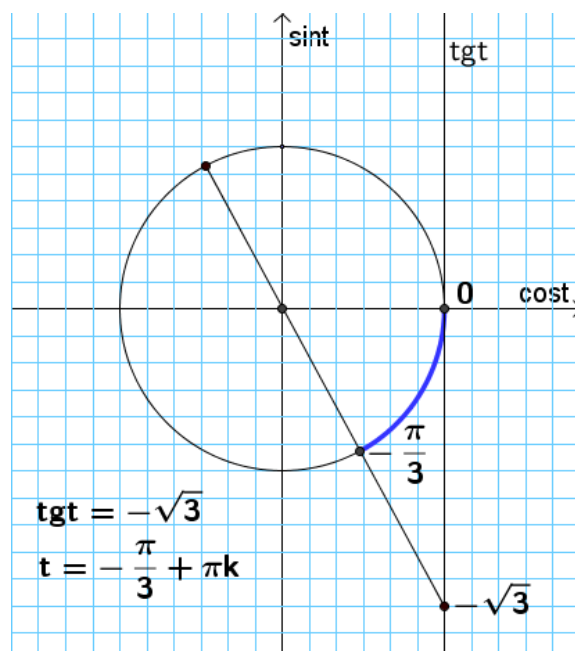
$$x = \frac{-10+3k}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

Наибольший отрицательный корень $x < 0$:

$$x = \frac{-10+3k}{8} < 0$$

$$-10+3k < 0, \quad 3k < 10, \quad k < 3\frac{1}{3}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad k = 3 \quad x = \frac{-10+3 \cdot 3}{8} = -0,125$$



Ответ: -0,125.

■ Тест

2. Простейшие тригонометрические уравнения

Вариант 1

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(x+7)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-1)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№3. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-4)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№4. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-1)}{4} = -1$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Вариант 2

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(2x-2)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(2x-3)}{6} = -0,5$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№3. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x-8)}{4} = 1$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№4. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+4)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Вариант 3

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(4x+5)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(4x-3)}{4} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№3. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(x+4)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№4. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(2x+1)}{6} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№5. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x+1)}{4} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Вариант 4

№1. Найдите корень уравнения $\cos \frac{\pi(8x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

№2. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(2x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№3. Найдите корень уравнения $\sin \frac{\pi(8x-9)}{4} = -1$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№4. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x+1)}{6} = \sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№5. Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+8)}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

▪ **Ответы (тест)** 2. Простейшие тригонометрические уравнения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар. 1	-6	2	-5	4	
Вар. 2	-4,5	-1	2	3	
Вар. 3	-1	-0,75	1	2	-2
Вар. 4	-0,5	-3	0,875	-2,5	-3

3. Прикладные задачи.

Тригонометрические уравнения или неравенства

■ Примеры

- №1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².
-
- №2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 12$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,8 м на расстоянии 1 м?
-
- №3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?
-
- №4. Два тела массой $m = 4$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 64 джоулей?
-
- №5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м и со скоростью течения $u = 1,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 60 с?
-
- №6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 15 \sin \frac{\pi t}{5}$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первых двух секунд скорость движения превышала 7,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.
-
- №7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?
-
- №9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не менее, чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.
-
- №10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 1$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\mathcal{E}_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $2 \cdot 10^{-4}$ В?
-
- №11. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?
-
- №12. Двигаясь со скоростью $v = 4$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 100 кВт (кВт – это кН · м/с).
-
- №13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 3600 нм?
-
- №14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,3 м/с?
-
- №15. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 12$ с – период колебаний, $v_0 = 1,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение (примеры) 3. Тригонометрические уравнения или неравенства

№1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (кундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение:

$$t \geq 3,6 \quad \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \geq 3,6$$

Ответ: 90.

$$\frac{2 \cdot 18 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 3,6 \Leftrightarrow \sin \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1, \quad \alpha_{\text{наим}} = 90^\circ$$

№2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 12$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,8 м на расстоянии 1 м?

Решение:

$$H = 0,8 + 1 \quad \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha) = 1,8$$

$$\frac{12^2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot 10} = 1,8 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha - \text{острый}, \quad \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

Ответ: 30.

№3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м.

Решение:

$$12,8 = \frac{16^2}{10} \sin 2\alpha, \quad \frac{128}{16^2} = \sin 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ)$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 30^\circ \\ 2\alpha = 150^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 15^\circ \\ \alpha = 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 15^\circ$$

Ответ: 15.

№4. Два тела массой $m = 4$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 64 джоулей?

Решение:

$$Q \geq 64 \quad mv^2 \sin^2 \alpha \geq 64$$

$$4 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha \geq 64 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ, \quad 2\alpha_{\text{наим}} = 60^\circ$$

Ответ: 60.

- №5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м и со скоростью течения $u = 1,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 60 с?

Решение:

$$t \leq 60 \quad \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha \leq 60 \quad \frac{90}{1,5} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \leq 60 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ, \quad \alpha_{\text{наим}} = 45^\circ \quad \text{Ответ: 45.}$$

α — острый

- №6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 15 \sin \frac{\pi t}{5}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первых двух секунд скорость движения превышала 7,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение:

$$v(t) \geq 7,5 \quad 15 \sin \frac{\pi t}{5} \geq 7,5 \quad \sin \frac{\pi t}{5} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi t}{5} \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq t \leq \frac{25}{6}, \quad t \in \left[\frac{5}{6}; 4\frac{1}{6} \right]$$

Время из первых двух секунд $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow t \in \left[\frac{5}{6}; 2 \right]$. Время из первых двух секунд, на протяжении

которого скорость движения превышала 7,5 см/с: $2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$.

Это составляет $\frac{7}{6} : 2 = \frac{7}{12} \approx 0,583... \approx 0,58$.

Ответ: 0,58.

- №7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

Решение:

$$M \geq 0,75 \quad N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha \geq 0,75$$

$$1000 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 \cdot \sin \alpha \geq 0,75 \Leftrightarrow \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

α — острый, наим

Ответ: 30.

- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение:

$$U \geq 1, \quad U_0 \sin(\omega t + \varphi) \geq 1, \quad 2 \cdot \sin(120^\circ t + 30^\circ) \geq 1 \quad \sin(120^\circ t + 30^\circ) \geq \frac{1}{2}$$

$$30^\circ + 360^\circ n \leq 120^\circ t + 30^\circ \leq 150^\circ + 360^\circ n$$

$$360^\circ n \leq 120^\circ t \leq 120^\circ + 360^\circ n$$

$$3n \leq t \leq 1 + 3n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n = 0 \quad (\text{время из первой секунды}) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad t = 1 - 0 = 1$$

Значит, лампочка будет гореть 100% времени на протяжении первой секунды.

Ответ: 100.

- №9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была не менее, чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

Решение:

$$F_L \geq 2 \cdot 10^{-8} \quad 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \sin \alpha \geq 2 \cdot 10^{-8}$$

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 30^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$$

Ответ: 30.

- №10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 1$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с - постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $2 \cdot 10^{-4}$ В?

Решение:

$$\varepsilon_i \leq 2 \cdot 10^{-4} \quad 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot \cos \alpha \leq 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наим}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №11. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Решение:

$$A \geq 2000, \quad 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \geq 2000$$

$$\cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наиб}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №12. Двигаясь со скоростью $v = 4$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 100 кВт (кВт - это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).

Решение:

$$N = 100, \quad 100 = 50 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 3600 нм?

Решение:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}, \quad d \leq 3600, \quad \frac{k\lambda}{\sin \varphi} \leq 3600$$

$$(\varphi - \text{острый}, \sin \varphi > 0) \quad k = 3$$

$$3 \cdot 600 \leq 3600 \cdot \sin \varphi, \quad \sin \varphi \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ, \quad \varphi_{\text{наим}} = 30^\circ$$

Ответ: 30.

- №14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг - масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг - масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,3 м/с?

Решение:

$$u \geq 0,3 \quad \frac{m}{m+M} \cdot v \cdot \cos \alpha \geq 0,3$$

$$\frac{75}{75+325} \cdot 3,2 \cdot \cos \alpha \geq 0,3 \Leftrightarrow \cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{наиб}} = 60^\circ$$

$$\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Ответ: 60.

- №15. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 12$ с - период колебаний, $v_0 = 1,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 11 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение:

$$v = 1,5 \sin \frac{2\pi 11}{12} = 1,5 \sin \frac{11\pi}{6} = 1,5 \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 1,5 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$E = \frac{0,16 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right)^2}{2} = 0,045$$

Ответ: 0,045.

■ Тест

3. Тригонометрические уравнения или неравенства

- №1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 13$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².
-
- №2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 8$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 0,6 м на расстоянии 1 м?
-
- №3. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 13$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик перелетит реку шириной 8,45 м?
-
- №4. Два тела массой $m = 2$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 100 джоулей?
-
- №5. Катер должен пересечь реку шириной $L = 49$ м и со скоростью течения $u = 0,7$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 70 с?
-
- №6. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 6 \sin \frac{\pi t}{3}$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 3 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.
-
- №7. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = N \cdot I \cdot B \cdot l^2 \sin \alpha$, где $I = 3$ А – сила тока в рамке, $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 600$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,9 Н·м?
-
- №8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ / \text{с}$, фаза $\varphi = -90^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нем не ниже, чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

№9. Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 6 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_{\text{л}}$ была не менее, чем $9 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

№10. Плоский замкнутый контур площадью $S = 4$ м² находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\mathcal{E}_i = aS \cos \alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 3 \cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м²). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $6 \cdot 10^{-4}$ В?

№11. Трактор тащит сани с силой $F = 60$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 80$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2400 кДж?

№12. Двигаясь со скоростью $v = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 40$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 60 кВт (кВт – это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).

№13. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 450$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1800 нм?

№14. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 4$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начала ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 300$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,4 м/с?

№15. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, $T = 2$ с – период колебаний, $v_0 = 0,3$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию через 3 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

▪ **Ответы (тест)**

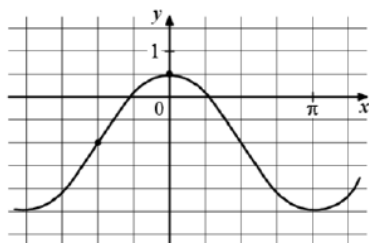
3. Тригонометрические уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9
90	45	15	90	45	0,5	30	75	30

№10	№11	№12	№13	№14	№15
60	60	60	30	60	0,036

4. Графики тригонометрических функций

1. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .

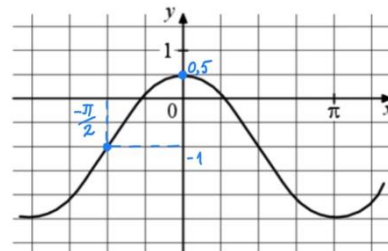


Решение:

$$\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \text{ и } (0; 0,5)$$

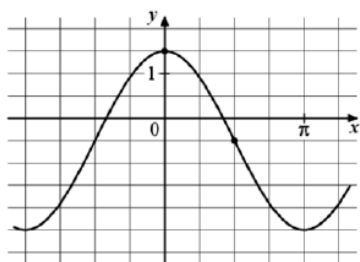
$$\begin{cases} -1 = a \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b; \\ 0,5 = a \cdot \cos 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ 0,5 = a - 1 \end{cases}; \begin{cases} b = -1 \\ a = 1,5 \end{cases}; \underline{a = 1,5}$$



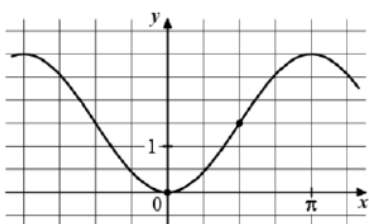
Ответ: 1,5.

2. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .



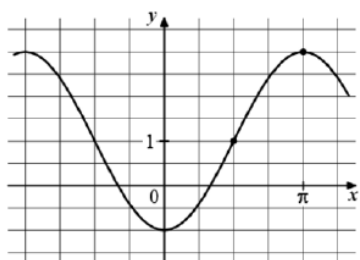
Ответ: 2.

3. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .



Ответ: -1,5.

4. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .

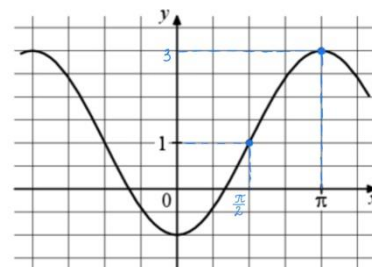


Решение:

$$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right) \text{ и } (\pi; 3)$$

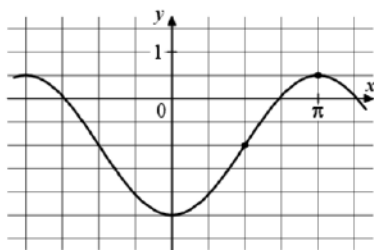
$$\begin{cases} 1 = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b; \\ 3 = a \cdot \cos \pi + b \end{cases}; \begin{cases} b = 1 \\ 3 = -a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}; \underline{b = 1}$$



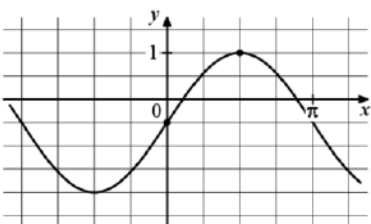
Ответ: 1.

5. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .



Ответ: -1.

6. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .

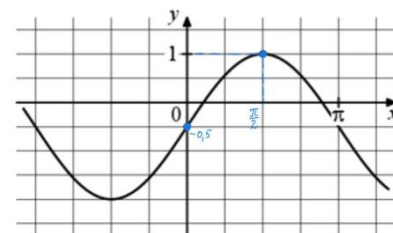


Решение:

$$(0; -0,5) \text{ и } \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$$

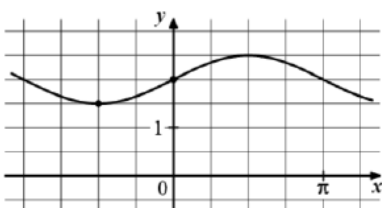
$$\begin{cases} -0,5 = a \cdot \sin 0 + b \\ 1 = a \cdot \sin \frac{\pi}{2} + b \end{cases}; \begin{cases} b = -0,5 \\ 1 = a - 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -0,5 \\ a = 1,5 \end{cases}; \underline{a = 1,5}$$



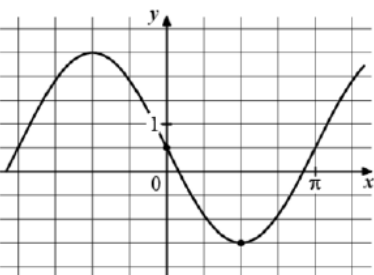
Ответ: 1,5.

7. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



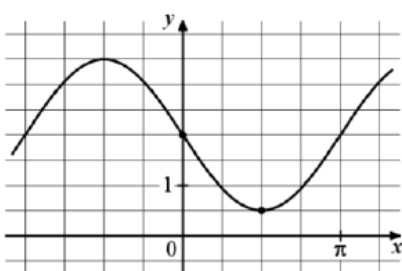
Ответ: 0,5.

8. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: -2.

9. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .

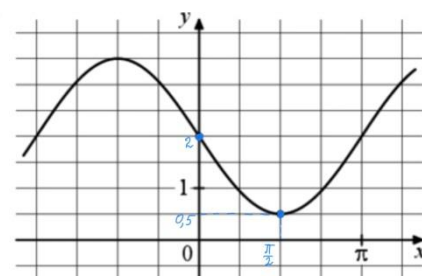


Решение:

$$(0; 2) \text{ и } \left(\frac{\pi}{2}; 0,5\right)$$

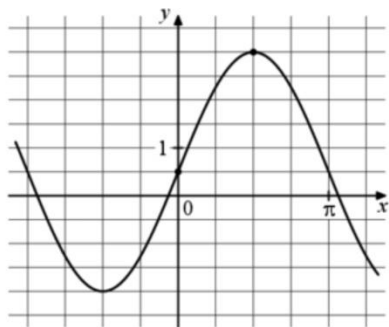
$$\begin{cases} 2 = a \cdot \sin 0 + b \\ 0,5 = a \cdot \sin \frac{\pi}{2} + b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 \\ 0,5 = a + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = -1,5 \end{cases}; \underline{b = 2}$$



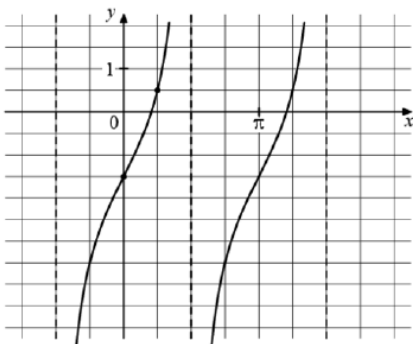
Ответ: 2.

10. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



Ответ: 0,5.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$. Найдите a и b .

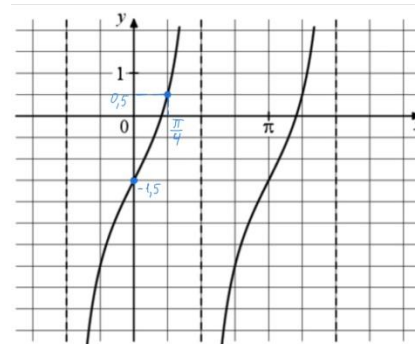


Решение:

$$(0; -1,5) \text{ и } \left(\frac{\pi}{4}; 0,5\right)$$

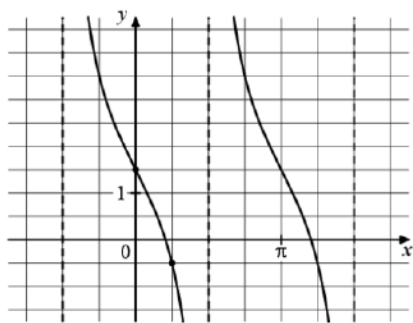
$$\begin{cases} -1,5 = a \cdot \operatorname{tg} 0 + b \\ 0,5 = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + b \end{cases}; \begin{cases} b = -1,5 \\ 0,5 = a - 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1,5 \\ a = 2 \end{cases}$$



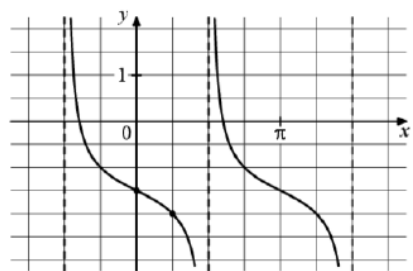
Ответ: $a = 2$, $b = -1,5$.

12. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$. Найдите a .



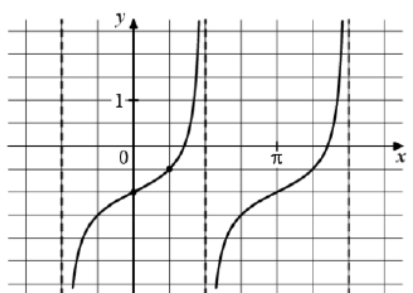
Ответ: -2.

13. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$. Найдите a .



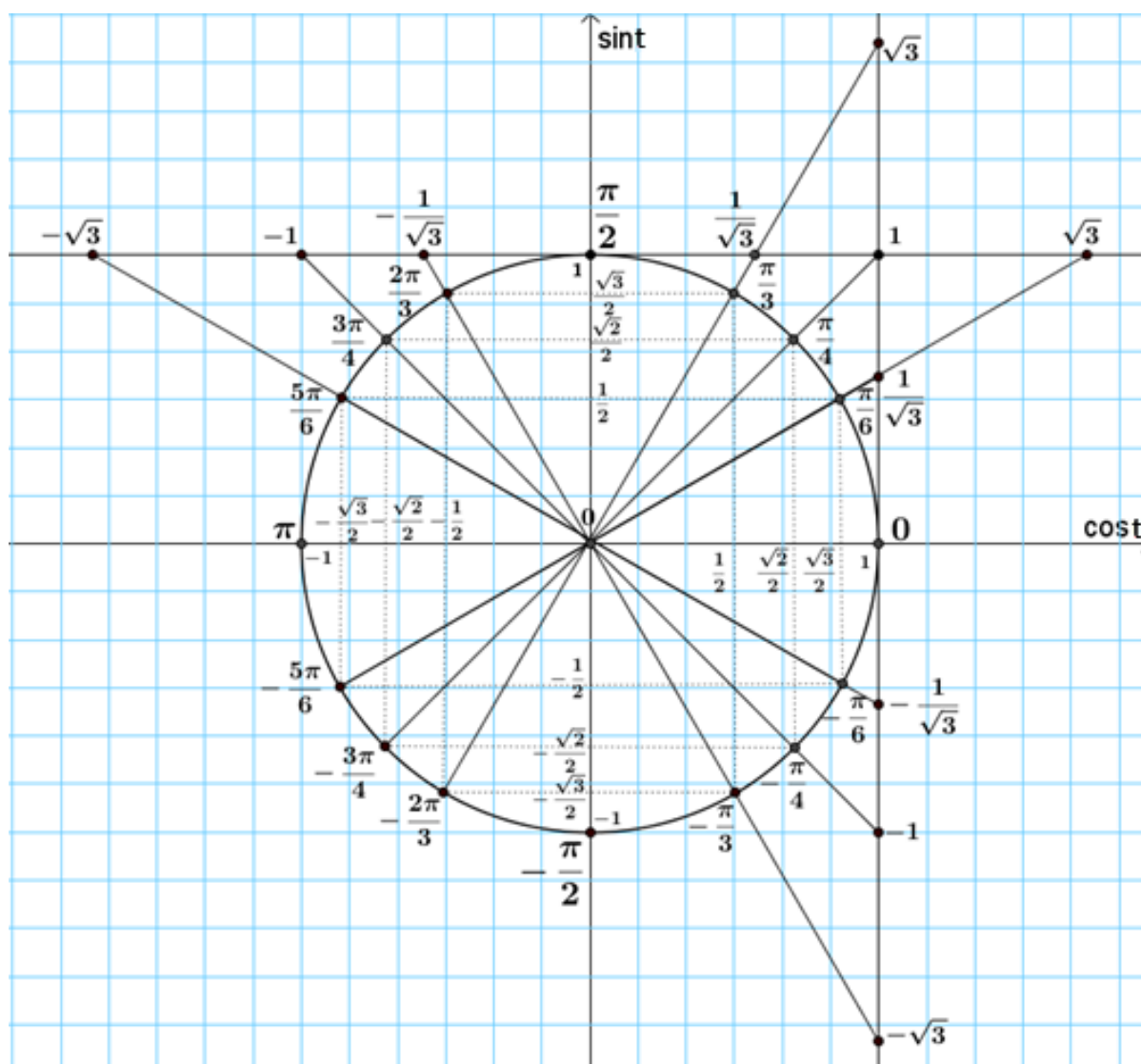
Ответ: -0,5.

14. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cdot \operatorname{tg} x + b$. Найдите b .



Ответ: -1.

✓ Тригонометрическая окружность



✓ **Алгоритм применения формул приведения**

1. Исследуем функцию на четность/нечетность.

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$$

2. Исследуем функцию на периодичность.

$$\sin(t + 2\pi k) = \sin t$$

$$\begin{array}{l} T_{\cos t} = T_{\sin t} = 2\pi \\ T_{\operatorname{tg} t} = T_{\operatorname{ctg} t} = \pi \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} \cos(t + 2\pi k) = \cos t \\ \operatorname{tg}(t + \pi k) = \operatorname{tg} t \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(t + \pi k) = \operatorname{ctg} t$$

3. Представим угол в виде: $\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right)$, $(\pi \pm t)$ или $(2\pi \pm t)$, где $t \in I$.

4. Определим знак исходной функции и поставим его перед приводимой функцией.

5. Для углов вида

- $\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right)$ название функции изменяем на “ко-функцию”;

для углов вида

- $(\pi \pm t)$ или $(2\pi \pm t)$ название функции не изменяем.

✓ *Некоторые основные тригонометрические формулы*

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2. $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

3. $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

5. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

6. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

7. $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

8. $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

9. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

10. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$