Досрочный ЕГЭ по математике Профильный уровень

11 класс 28.03.2025

Примерный вариант

Часть 2

№13. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Однородные тригонометрические уравнения

№14. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M – середина ребра CC_1. Через точки A_1, M и B проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если известно, что площадь сечения равна 6 и $AB = 2$.

Треугольная призма. Площадь сечения

№15. Решите неравенство $9\log_{12}\left(x^2 - 3x - 4\right) \le 10 + \log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$.

Основные приемы решения логарифмических неравенств

№16. Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - \left(0,5x^2 + 2x + 6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Задачи на оптимизацию

№17. Сумма оснований трапеции равна 17, а её диагонали равны 8 и 15.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

№18. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $8x^6 + \left(a - |x|\right)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$ имеет более трех решений.

Аналитические способы решения уравнений с параметром

№19. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причем и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

Ответы

№13	№14б	№15	№16	№17б	№18	№19
а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ б) $\frac{4\pi}{3},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{7\pi}{3}$	$2\sqrt{11}$	$[-8;-1)\cup(4;16]$	4	$\frac{120}{17}$	$0<a\le\frac{1}{8}$	а) да; б) 17; в) 41.

Решение

№13. **а) Решите уравнение** $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=0$**.**

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$**.**

Решение: *а)*

$$\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=0 \quad \Big|\ :\cos 2x$$

$$\sqrt{3}tg\,2x+3=0$$

$$tg\,2x=-\sqrt{3}$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

б) Отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

$$\pi\le-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\le\frac{5\pi}{2}\quad\Big|\ \cdot\frac{6}{\pi}$$

$$6\le-1+3k\le15$$

$$7\le3k\le16,\quad \frac{7}{3}\le k\le\frac{16}{3},\quad 2\frac{1}{3}\le k\le5\frac{1}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$k=3\quad x_1=-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi}{3}$$

$$k=4\quad x_2=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

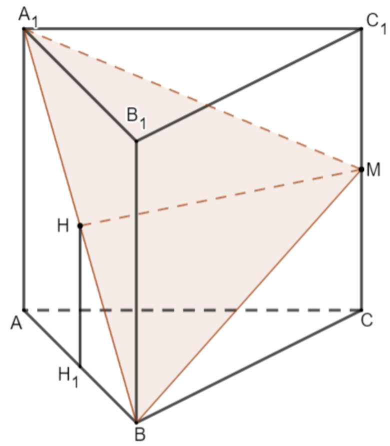
$$k=5\quad x_3=-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{2}=\frac{7\pi}{3}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{4\pi}{3},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{7\pi}{3}$.

№14. **Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка M – середина ребра CC_1. Через точки A_1, M и B проведена плоскость α.**

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренный треугольник.

б) Найдите высоту призмы, если известно, что площадь сечения равна 6 и $AB=2$.



Решение:

а) Призма правильная, значит, она прямая и в основаниях лежат равные равносторонний треугольники. Сечение призмы плоскостью α является треугольник A_1MB. Прямоугольные треугольники MC_1A_1 и MCB равны по двум катетам $C_1M=MC$ (M – середина ребра CC_1 по условию) и $BC=A_1C_1$ (как стороны оснований), следовательно, $MA_1=MB$. Значит, $\triangle A_1MB$ – равнобедренный треугольник.

б) В треугольнике A_1MB проведем высоту MH к основанию BA_1. Тогда MH является также медианой этого треугольника, значит, H – середина BA_1. В плоскости боковой грани ABB_1 проведем HH_1 параллельно AA_1. Получим, что $HH_1=\dfrac{AA_1}{2}$ как средняя линия $\triangle ABA_1$, но $MC=\dfrac{CC_1}{2}$, тогда $MC=HH_1$ и MCH_1H – прямоугольник, значит, $MH=CH_1$.

В $\triangle ABC$ $CH_1=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. Обозначим $AA_1=h$, тогда в $\triangle ABA_1$ $BA_1=\sqrt{AB^2+AA_1^2}=\sqrt{2^2+h^2}$.

$$S_{A_1MB}=\frac{1}{2}MH\cdot BA_1,\ \ 6=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+h^2},\ \ 12=\sqrt{3\left(4+h^2\right)},\ \ 12^2=3\left(4+h^2\right),\ \ h^2=44,\ \ h=2\sqrt{11}$$

Ответ: б) $2\sqrt{11}$.

№15. **Решите неравенство** $9\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 10+\log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$.

Решение:

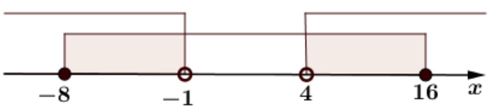
$$9\log_{12}(x-4)(x+1)\le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$$

$$\text{ОДЗ}:\ \begin{cases} x^2-3x-4>0\\ \dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0\end{cases};\quad \begin{cases}(x-4)(x+1)>0\\ \dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0\end{cases};\quad x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$$

$$\log_{12}(x-4)^9(x+1)^9-\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}\le 10,\quad \log_{12}\frac{(x-4)^9(x+1)^9(x-4)}{(x+1)^9}\le 10,$$

$$\log_{12}(x-4)^{10}\le 10,\ \ 10\cdot\log_{12}|x-4|\le 10,\ \ \log_{12}|x-4|\le 1,\ \ \log_{12}|x-4|\le\log_{12}12$$

$$0<|x-4|\le 12,\ \ \begin{cases}-12\le x-4\le 12\\ x\ne 4\end{cases},\ \ \begin{cases}-8\le x\le 16\\ x\ne 4\end{cases},\ \ x\in[-8;4)\cup(4;16]$$



С учетом ОДЗ получим $x\in[-8;-1)\cup(4;16]$.

Ответ: $[-8;-1)\cup(4;16]$.

МатематикаОнлайн
ВАШ ОНЛАЙН УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
www.mathcourse.ru

№16. Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+2x+6\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p=10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Прибыль фирмы (в млн. рублях) за один год выражается как

$$f(x)=px-\left(0,5x^2+2x+6\right),\quad f(x)=-0,5x^2+(p-2)x-6.$$

Графиком функции $y=f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения функция достигает в вершине $x_в=-\dfrac{p-2}{2\cdot(-0,5)}=p-2$ и

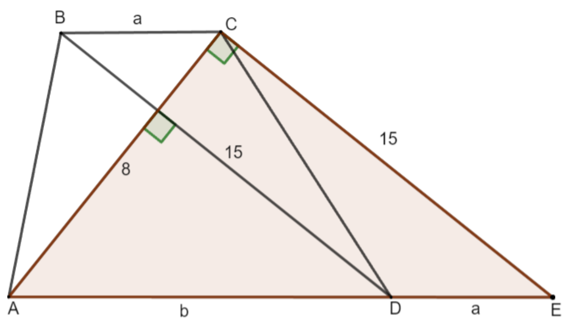
$$f_{наиб}=f(p-2)=-0,5\cdot(p-2)^2+(p-2)^2-6=\frac{(p-2)^2}{2}-6.$$

Номер года	*Цена продукции*	*Годовая прибыль*	*Суммарная прибыль*	*Окупаемость*
1	$p=10$	$f_1=\dfrac{(10-2)^2}{2}-6=28$	$f_1=28$	$28<159$
2	$p=11$	$f_2=\dfrac{(11-2)^2}{2}-6=34,5$	$f_1+f_2=28+34,5=62,5$	$62,5<159$
3	$p=12$	$f_3=\dfrac{(12-2)^2}{2}-6=48$	$f_1+f_2+f_3=62,5+48=110,5$	$110,5<159$
4	$p=13$	$f_4=\dfrac{(13-2)^2}{2}-6=54,5$	$f_1+f_2+f_3+f_4=$ $=110,5+54,5=165,5$	$165,5>159$

Значит, при цене товара $p=13$ тыс. рублей за единицу строительство завода окупится за 4 года.

Ответ: 4.

№17. Сумма оснований трапеции равна 17, а её диагонали равны 8 и 15.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.



Решение:

а) Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями $BC=a$ и $AD=b$ диагонали $AC=8$ и $BD=15$. Из вершины трапеции C проведем прямую, параллельную диагонали BD. Пусть продолжение основания AD пересекает эту прямую в точке E, значит, $BC\parallel DE$. Четырехугольник $BCED-$ параллелограмм, тогда $BD=CE=15$ и $DE=BC=a$.

В $\triangle ACE$ $AC=8$, $CE=15$ и $AE=AD+DE=a+b=17$, имеем $17^2=8^2+15^2-$ верно. Тогда по теореме обратной теореме Пифагора $\triangle ACE-$ прямоугольный треугольник с прямым углом ACE. Следовательно, $AC\perp CE$ и, поскольку $BD\parallel CE$, то $AC\perp BD$.

б) В трапеции $ABCD$ из вершины C проведем h, она также будет высотой и в треугольнике ACE.

В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе равна $h=\frac{AC\cdot CE}{AE}=\frac{8\cdot 15}{17}=\frac{120}{17}$.

Ответ: б) $120/17$.

№18. **Найти все значения параметра, при которых уравнение $8x^6+\left(a-|x|\right)^3+2x^2-|x|+a=0$ имеет более трех решений.**

Решение:

Равносильными преобразованиями получим уравнение

$$\left(2x^2\right)^3+2x^2=|x|-a-\left(a-|x|\right)^3, \quad \left(2x^2\right)^3+2x^2=\left(|x|-a\right)^3+\left(|x|-a\right)$$

Пусть $t_1=2x^2$, $t_2=|x|-a$, тогда $f\left(t_1\right)=f\left(t_2\right)$, где $f\left(t\right)=t^3+t$. Функция $f\left(t\right)$ - возрастающая, как сумма двух возрастающих функций (или $f'\left(t\right)=\left(t^3+t\right)'=3t^2\ge 0$ при всех t, значит, $f\left(t\right)-$ возрастающая функция), поэтому в силу монотонности функции уравнение

$$f\left(2x^2\right)=f\left(|x|-a\right)\Leftrightarrow 2x^2=|x|-a.$$

Уравнение $2x^2-|x|+a=0\Leftrightarrow 2|x|^2-|x|+a=0$ имеет решение $|x|=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}$ при

$D=1-8a\ge 0,\ \ a\le\frac{1}{8}$.

1) Уравнение $|x|=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}$ имеет два решения, выражение $\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}>0$ при всех $a\le\frac{1}{8}$.

2) $|x|=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}$ имеет два решения при $1-\sqrt{1-8a}>0,\ \ \sqrt{1-8a}<1,\ \ 0\le 1-8a<1,\ \ 0<a\le\frac{1}{8}$.

Тогда исходное уравнение имеет более трех корней при $0<a\le\frac{1}{8}$.

Ответ: $0<a\le\frac{1}{8}$.

№19. **В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причем и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.**

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

Решение:

Пусть a юношей отправили по 4 письма и b юношей отправили по 21 письму. Тогда количество девушек $a+b$ и количество отправленных писем $4a+21b$.

а) Каждая девушка получила 7 писем, значит, всеми девушками было получено $7\left(a+b\right)$ писем.

Отправлено было $4a+21b$, тогда составим уравнение $7\left(a+b\right)=4a+21b$ и получим $a=\frac{14b}{3}$.

Поскольку a и $b-$ это натуральные числа большие 1, выражающие количество юношей, то, чтобы получилось $a\in\left\{2;3...\right\}$, надо чтобы b было кратно 3. Например, $b=3$, тогда $a=14$. Значит, 14 юношей отправили по 4 письма и 3 юношей отправили по 21 письму. Всего они отправили девушкам

$4\cdot14+21\cdot3=56+63=119$ писем, тогда всего девушек $a+b=14+3=17$ и каждая получила по $119:17=7$ писем.

б) Общее количество писем $4a+21b$ должно делиться на количество девушек $a+b$ без остатка. В дроби выделим целую часть $\frac{4a+21b}{a+b}=\frac{4a+4b+17b}{a+b}=\frac{4(a+b)}{a+b}+\frac{17b}{a+b}=4+\frac{17b}{a+b}$. Получили, что $17b$ тоже должно делиться без остатка на $a+b$. Поскольку по условию $a\geq2$ и $b\geq2$, то $b<a+b$ и, значит, b не может на цело делиться на $a+b$. Тогда 17 должно делиться на $a+b$. Наименьшее натуральное число, делящееся на 17, - это 17. Наименьшее количество девушек в группе - 17.

в) Пусть a юношей отправили по 4 письма и $n-a$ юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили $4a+21(n-a)$ писем, а число полученных девушками писем не меньше

$$0+1+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{0+(n-1)}{2}\cdot n=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Получим $4a+21(n-a)\geq\frac{n(n-1)}{2}$, $21n-17a\geq\frac{n(n-1)}{2}$, $21n\geq\frac{n(n-1)}{2}+17a$.

Поскольку $17a$ положительная величина, то перейдем к строгому неравенству

$$21n>\frac{n(n-1)}{2},\ 42n>n^2-n,\ n^2-n-42n<0,\ n(n-43)<0,\ n<43.$$

Если $n=42$, то $21n-17a\geq\frac{n(n-1)}{2}$, $21\cdot42-17a\geq\frac{42\cdot41}{2}$, $882-17a\geq861$, $17a\leq21$, $a\leq\frac{21}{17}=1\frac{4}{17}$, значит $a=1$, что противоречит условию $a\geq2$.

Если $n=41$, то $21n-17a\geq\frac{n(n-1)}{2}$, $21\cdot41-17a\geq\frac{41\cdot40}{2}$, $861-17a\geq820$, $17a\leq41$, $a\leq\frac{41}{17}=2\frac{7}{17}$, значит, $a=2$. Тогда всего отправлено писем девушкам

$4a+21(n-a)=4\cdot2+21\cdot(41-2)=8+21\cdot39=827$. Эти письма можно распределить между девушками таким образом: 40 девушек получили от 0 до 39 писем и еще одна - 47. Таким образом, наибольшее возможное количество девушек - это 41.

$0+1+\ldots+38+39=\frac{0+39}{2}\cdot40=780$, $827-780=47$.

Ответ: а) да, б) 17, в) 41.