

Основные тригонометрические формулы

1. Формулы приведения

■ Примеры

Найдите значение выражения:

№1. $\frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ}$

№2. $7 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ$

№3. $\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$

№4. $-11 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,96$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$

№5. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 25$.

№6. Найдите значение выражения $5 \cos(2\pi + \beta) + 4 \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{3}$

№7. Найдите значение выражения: а) $27\sqrt{2} \cos(-675^\circ)$; б) $\frac{60}{\sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}$.

■ **Решение (примеры)**

1. Формулы приведения

№1. $\frac{14 \sin 19^\circ}{\sin 341^\circ} = \frac{14 \sin 19^\circ}{-\sin 19^\circ} = -14$

1) $\sin 341^\circ = \sin(360^\circ - 19^\circ) = \sin(-19^\circ) = -\sin 19^\circ$

Ответ: - 14.

№2. $7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ = 7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 13^\circ) = 7 \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ = 7$

Ответ: 7.

№3. $\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ} = \frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ} = \frac{12}{1} = 12$

1) $\cos^2 207^\circ = \cos^2(180^\circ + 27^\circ) = (\cos(180^\circ + 27^\circ))^2 = (-\cos 27^\circ)^2 = \cos^2 27^\circ$

Ответ: 12.

№4. $-11 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,96$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$.

Решение:

1) Применяем формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

2) Для нахождения $\cos \alpha$ используем основное тригонометрическое тождество и определяем знак косинуса во II четверти:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in II, \quad \cos \alpha < 0$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,96^2} = -\sqrt{(1 - 0,96)(1 + 0,96)} = -\sqrt{0,04 \cdot 1,96} = -0,2 \cdot 1,4 = -0,28$$

3) Находим значение выражения:

$$\begin{aligned} -11 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) &= -11 \cdot (-\cos \alpha) = 11 \cdot \cos \alpha = 11 \cdot (-0,28) = -(10 + 1) \cdot 0,28 = \\ &= -2,8 - 0,28 = -3,08 \end{aligned}$$

Ответ: -3,08.

№5. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 25$.

Решение:

1) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$

2) $\operatorname{tg} \alpha = 25, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{25} = 0,04;$

3) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha = -0,04.$

Ответ: -0,04.

№6. Найдите значение выражения $5 \cos(2\pi + \beta) + 4 \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{3}$.

Решение:

$$1) \cos(2\pi + \beta) = \cos \beta$$

$$2) \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$$

"-" III

$$3) 5 \cdot \cos \beta + 4 \cdot \cos \beta = 9 \cdot \cos \beta = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$$

Ответ: -3.

№7. Найдите значение выражения: а) $27\sqrt{2} \cos(-675^\circ)$; б) $\frac{60}{\sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}$.

Решение:

$$а) \cos(-675^\circ) = \cos 675^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$27 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$$

$$б) 1) \sin\left(-\frac{32\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{32\pi}{3}\right) = -\sin\left(10\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{60}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-60 \cdot 4}{3} = -80.$$

Ответ: а) 27; б) -80.

Вариант 1

№1. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

№2. Найдите значение выражения $\frac{5\operatorname{tg} 163^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ}$.

№3. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ$.

№4. Найдите значение выражения $\frac{12}{\sin^2 37^\circ + \sin^2 127^\circ}$.

№5. Найдите $-20\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Вариант 2

№1. Найдите значение выражения $\frac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

№2. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$.

№3. Найдите значение выражения $3\cos(-\pi + \beta) + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$, если $\cos \beta = -\frac{1}{2}$.

№4. Найдите значение выражения $\frac{6}{\cos^2 23^\circ + \cos^2 113^\circ}$.

№5. Найдите $8\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Вариант 3

№1. Найдите значение выражения $\frac{60}{\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)}$.

№2. Найдите значение выражения $24\sqrt{2} \cos(1035^\circ)$.

№3. Найдите значение выражения $\frac{\cos(2\pi - \beta) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{2 \cos(\beta - \pi)}$.

№4. Найдите значение выражения $2 \operatorname{tg}(\pi + \gamma) + 2 \operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg} \gamma = 0,6$.

№5. Найдите $11 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,28$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

Вариант 4

№1. Найдите значение выражения $\frac{36}{\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)}$.

№2. Найдите значение выражения $15\sqrt{2} \cos(-585^\circ)$.

№3. Найдите значение выражения $\frac{3 \cos(-3\pi - \beta) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{5 \cos(\beta + 3\pi)}$.

№4. Найдите значение выражения $-5 \operatorname{tg}(-4\pi + \gamma) - 2 \operatorname{tg}(\gamma)$, если $\operatorname{tg} \gamma = 0,2$.

№5. Найдите $20 \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

■ Ответы (тест)

1. Формулы приведения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	-4	-5	-5	12	19,2
Вар.2	14	-0,8	-1	6	6,4
Вар.3	80	24	0	0	10,56
Вар.4	-48	-15	0	-1,4	16

2. Формулы двойного угла

■ Примеры

Найдите значение выражения:

№1. Найдите $\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,7$

№2. а) $\frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin 280^\circ}$; б) $\frac{-10 \sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ}$; в) $\frac{12 \sin 114^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \cos 33^\circ}$.

№3. $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12}$

№4. а) $\frac{19(\sin^2 84^\circ - \cos^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ}$; б) $\sqrt{8} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{8} \sin^2 \frac{13\pi}{8}$.

№5. Найдите: а) $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{7}$; б) $-37 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$.

№6. Найдите $-18 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

№7. а) $\sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12}$; б) $\sqrt{32} - \sqrt{128} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

Решение (примеры)

2. Формулы двойного угла

№1. Найдите $\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,7$.

$$\frac{2 \sin 4\alpha}{7 \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot \sin(2 \cdot 2\alpha)}{7 \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{7 \cos 2\alpha} = \frac{4 \cdot \sin 2\alpha}{7} = \frac{4 \cdot 0,7}{7} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

№2. а) $\frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin 280^\circ} = \frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{\sin(2 \cdot 140^\circ)} = \frac{44 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ}{2 \sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ} = 22;$

Ответ: 22.

б) $\frac{-10 \sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ} = \frac{-10 \cdot \sin(2 \cdot 82^\circ)}{\sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ} = \frac{-10 \cdot 2 \cdot \sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \cos 82^\circ} = -20.$

Ответ: -20.

в) $\frac{12 \sin 114^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \cos 33^\circ} = \frac{12 \sin 2 \cdot 57^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \sin 57^\circ} = \frac{12 \cdot 2 \cdot \sin 57^\circ \cdot \cos 57^\circ}{\cos 57^\circ \cdot \sin 57^\circ} = 24.$

Ответ: 24.

№3. $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12} = \frac{2}{2} \cdot \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2 \cdot 13\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{13\pi}{6} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25.

№4. а) $\frac{19(\sin^2 84^\circ - \cos^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19(\cos^2 84^\circ - \sin^2 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19 \cdot \cos(2 \cdot 84^\circ)}{\cos 168^\circ} = \frac{-19 \cdot \cos 168^\circ}{\cos 168^\circ} = -19$

Ответ: -19.

б) $\sqrt{8} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{8} \sin^2 \frac{13\pi}{8} = \sqrt{8} \left(\cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sin^2 \frac{13\pi}{8} \right) = \sqrt{8} \cdot \cos \frac{2 \cdot 13\pi}{8} = \sqrt{8} \cdot \cos \frac{13\pi}{4} =$
 $= \sqrt{8} \cdot \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{8} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{8} \cos \frac{\pi}{4} = -\sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

Ответ: -2.

№5. Найдите: а) $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{7}$; б) $-37 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$.

а) $98 \cos 2\alpha = 98(2 \cos^2 \alpha - 1) = 98 \left(2 \cdot \left(\frac{5}{7} \right)^2 - 1 \right) = 98 \left(\frac{50}{49} - 1 \right) = 2$

Ответ: 2.

б) $-37 \cos 2\alpha = -37(2 \cos^2 \alpha - 1) = -37(2(-0,6)^2 - 1) = -37(0,72 - 1) = -37 \cdot (-0,28) =$
 $= (40 - 3) \cdot 0,28 = 11,2 - 0,84 = 10,36$

Ответ: 10,36.

№6. Найдите $-18\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

$$\begin{aligned} -18\cos 2\alpha &= -18(1 - 2\sin^2 \alpha) = -18(1 - 2 \cdot (-0,6)^2) = -18(1 - 0,72) = -18 \cdot 0,28 = \\ &= -0,28 \cdot (20 - 2) = -5,6 + 0,56 = -5,04 \end{aligned}$$

Ответ: -5,04.

№7. а)

$$\begin{aligned} \sqrt{48} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 12} \cos^2 \frac{13\pi}{12} - \sqrt{12} = \sqrt{12} \left(2 \cos^2 \frac{13\pi}{12} - 1 \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{2 \cdot 13\pi}{12} = \\ &= \sqrt{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

б)

$$\begin{aligned} \sqrt{32} - \sqrt{128} \sin^2 \frac{3\pi}{8} &= \sqrt{32} - \sqrt{32 \cdot 4} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \sqrt{32} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \sqrt{32} \cdot \cos \frac{2 \cdot 3\pi}{8} = \\ &= \sqrt{32} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{32} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{64}}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{aligned}$$

Ответ: -4.

Тест

2. Формулы двойного угла

Вариант 1

№1. Найдите $\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = -0,7$.

№2. $\frac{42 \sin 77^\circ \cdot \cos 77^\circ}{\sin 154^\circ}$

№3. $\frac{-13 \sin 170^\circ}{\sin 85^\circ \cdot \sin 5^\circ}$

№4. $\frac{-20 \sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$

№5. $\sin \frac{23\pi}{12} \cdot \cos \frac{23\pi}{12}$

№6. $\frac{31(\sin^2 73^\circ - \cos^2 73^\circ)}{\cos 146^\circ}$

№7. $\sqrt{32} \cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{3\pi}{8}$

№8. Найдите $-20 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$.

№9. Найдите $147 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{7}$.

№10. Найдите $-25 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,8$.

№11. $\sqrt{12} \cos^2 \frac{17\pi}{12} - \sqrt{3}$

№12. $\sqrt{75} - \sqrt{300} \sin^2 \frac{13\pi}{12}$

Вариант 2

№1. Найдите $\frac{3 \sin 4\alpha}{5 \cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0,4$.

№2. $\frac{16 \sin 142^\circ \cdot \cos 142^\circ}{\sin 284^\circ}$

№3. $\frac{-16 \sin 156^\circ}{\sin 78^\circ \cdot \sin 12^\circ}$

№4. $\frac{20 \sin 142^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 19^\circ}$

№5. $5\sqrt{2} \sin \frac{9\pi}{8} \cdot \cos \frac{9\pi}{8}$

№6. $\frac{6(\sin^2 68^\circ - \cos^2 68^\circ)}{\cos 136^\circ}$

№7. $\sqrt{27} \cos^2 \frac{7\pi}{12} - \sqrt{27} \sin^2 \frac{7\pi}{12}$

№8. Найдите $-15 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,3$.

№9. Найдите $98 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{6}{7}$.

№10. Найдите $-44 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,5$.

№11. $\sqrt{200} \cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sqrt{50}$

№12. $\sqrt{12} - \sqrt{48} \sin^2 \frac{17\pi}{12}$

Ответы (тест)

2. Формулы двойного угла

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Вар.1	-0,84	21	-26	-40	-0,25	-31	-4	5,6	-93	-7	-1,5	7,5
Вар.2	-0,48	8	-32	40	2,5	-6	-4,5	-12,3	46	22	5	-3