

Целые алгебраические уравнения или неравенства

■ Примеры

- №1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 18$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 8,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
-
- №2. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.
-
- №3. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?
-
- №4. Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ – постоянные параметры, x (м) – смещение камня по горизонтали, y (м) – высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?
-
- №5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1350$ К, $a = -7,5$ К/мин², $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.
-
- №6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P – мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T – температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{228} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $1,5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.
-
- №7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho gl^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ дайте в метрах.

- №8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 42000 Н? Ответ дайте в метрах.
-
- №9. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.
-
- №10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.
-
- №11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 5$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.
-
- №12. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведра сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v – скорость движения ведра в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ дайте в м/с.
-
- №13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20 \text{ м}$ – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

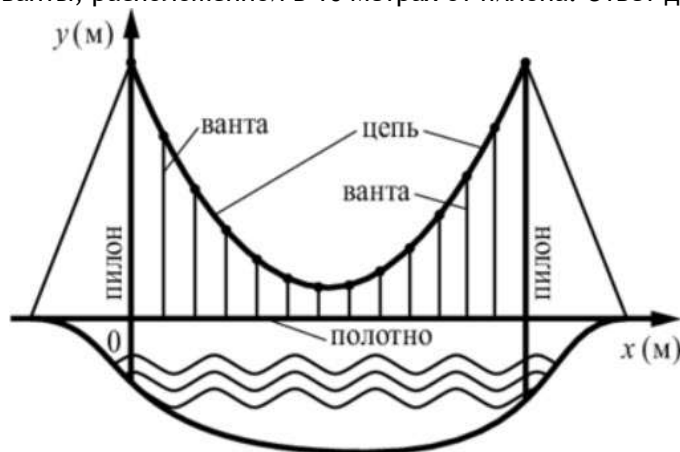
- №14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2$ м - начальный уровень воды, $a = \frac{1}{50}$ м/мин² и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

- №15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega = 40^\circ / \text{мин}$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ / \text{мин}^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3000° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.

- №16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

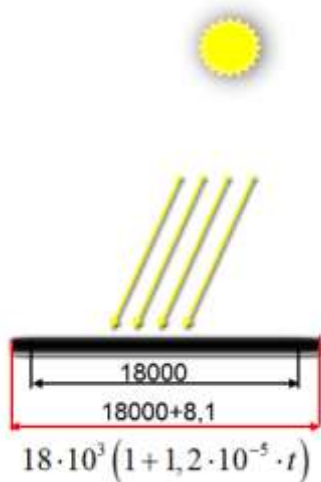
- №17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

- №18. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y = 0,001x^2 - 0,29x + 25$, где x и y измеряются в метрах. найдите длину ванта, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Решение (примеры) Целые алгебраические уравнения или неравенства

- №1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 18$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 8,1 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



Решение:

$$18 \text{ м} = 18 \cdot 10^3 \text{ мм}$$

$$18 \cdot 10^3 + 8,1 = 18 \cdot 10^3 (1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t)$$

$$18 \cdot 10^3 + 8,1 = 18 \cdot 10^3 + 18 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t$$

$$8,1 = 18 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t$$

$$t = \frac{8,1}{18 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2}$$

$$t = \frac{81 \cdot 10^2}{18 \cdot 12}$$

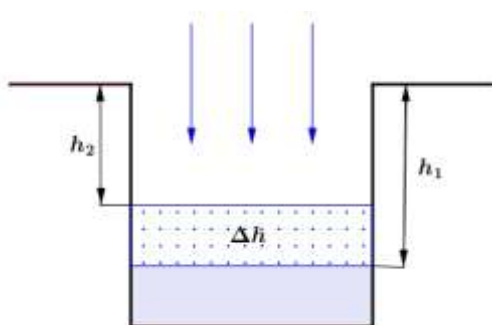
$$t = 37,5^\circ$$

Ответ: 37,5.



В июне 2013 года произошла железнодорожная катастрофа. Основной версией причины схода вагонов поезда N 140 Новосибирск - Адлер могла стать деформация рельсов из-за высоких температур, которые тогда были на Кубани.

- №2. После дождя уровень воды в колодез может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодез и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.



Решение:

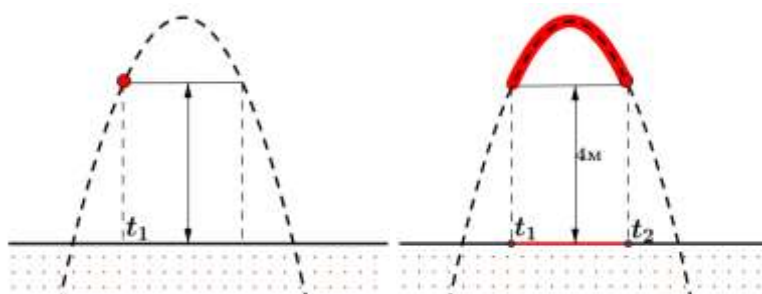
$$t_1 = 0,6 \quad h_1 = 5 \cdot 0,6^2$$

$$t_2 = 0,6 - 0,2 = 0,4 \quad h_2 = 5 \cdot 0,4^2$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 5 \cdot 0,6^2 - 5 \cdot 0,4^2 = 5 \cdot (0,6^2 - 0,4^2) = 5 \cdot 0,2 = 1$$

Ответ: 1.

- №3. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?



Решение:

$$h(t) \geq 4$$

$$1,6 + 13t - 5t^2 \geq 4$$

$$5t^2 - 13t + 2,4 \leq 0$$

$$(t - 2,4)(t - 0,2) \leq 0$$

$$0,2 \leq t \leq 2,4$$

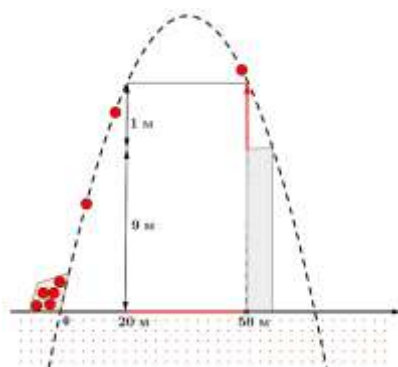
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2,4 - 0,2 = 2,2$$

Ответ: 2,2.

- №4. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту.

Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ —

постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?



Решение:

$$y(x) \geq 9 + 1$$

$$-\frac{1}{100}x^2 + \frac{7}{10}x \geq 10 \quad | \cdot 100$$

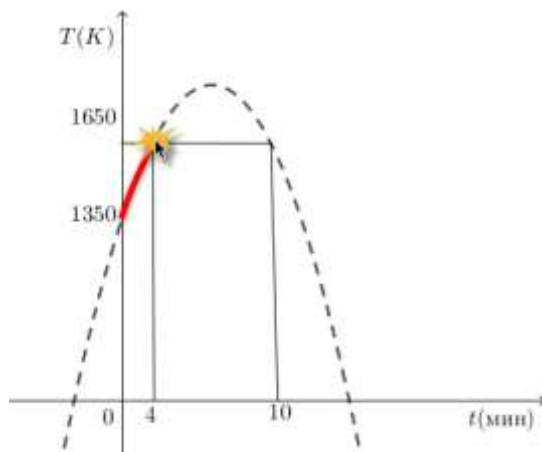
$$-x^2 + 70x - 1000 \geq 0$$

$$x^2 - 70x + 1000 \leq 0$$

$$20 \leq x \leq 50, \quad x_{\text{наиб}} = 50$$

Ответ: 50.

- №5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1350 \text{ К}$, $a = -7,5 \text{ К/мин}^2$, $b = 105 \text{ К/мин}$. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.



Решение:

$$1650 = 1350 + 105t - 7,5t^2$$

$$7,5t^2 - 105t + 300 = 0$$

$$t^2 - 14t + 40 = 0$$

$$t_1 = 4 \quad t_2 = 10$$

Нагревательный элемент некоторого прибора достигает температуры 1650 К за 4 мин, дальнейшее нагревание может привести к его поломке. Поэтому наибольшее время, через которое надо прибор отключить после начала работы, равно 4 мин.

Ответ: 4.

- №6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P – мощность излучения звезды (в Ваттах),
 $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах),
а T – температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{228} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $1,5625 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

Решение:

$$1,5625 \cdot 10^{25} = 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{228} \cdot 10^{20} \cdot T^4$$

$$T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{5,7 \cdot 10^{12}}, \quad T^4 = \frac{15625 \cdot 10^{21} \cdot 228}{57 \cdot 10^{11}}, \quad T^4 = 15625 \cdot 10^{10} \cdot 4, \quad T^4 = 5^4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^{10},$$

$$T^4 = 5^4 \cdot 10^{12}, \quad T = 5 \cdot 10^3 = 5000.$$

Ответ: 5000.

- №7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ дайте в метрах.

Решение:

$$F_A \leq 78400, \quad \rho g l^3 \leq 78400, \quad 1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \leq 78400, \quad l^3 \leq 8, \quad l \leq 2, \quad l_{\text{наиб}} = 2.$$

Ответ: 2.

- №8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 42000 Н? Ответ дайте в метрах.

Решение:

$$F_A \leq 42000, \quad \alpha \rho g r^3 \leq 42000, \quad 4,2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot r^3 \leq 42000, \quad r^3 \leq 1, \quad r \leq 1, \quad r_{\text{наиб}} = 1$$

Ответ: 1.

- №9. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.

Решение:

$$p = 500, \quad v = 300, \quad f = 700000, \quad q = ?$$

$$\pi(q) = q(p - v) - f, \quad 300000 = q(500 - 300) - 700000, \quad 1000000 = 200q, \quad q = 5000$$

Ответ: 5000.

- №10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 170 - 10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 700 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.

Решение:

$$\begin{aligned} r(p) &= q \cdot p, \quad q = 170 - 10p, \quad r(p) \geq 700 \\ (170 - 10p)p &\geq 700 \\ -10p^2 + 170p - 700 &\geq 0 \\ p^2 - 17p + 70 &\leq 0 \\ (p - 7)(p - 10) &\leq 0 \\ 7 \leq p &\leq 10 \end{aligned}$$

Наибольшее значение $p = 10$ тыс. руб. за ед.

Ответ: 10.

- №11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 5$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой

$$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение:

$$\begin{aligned} 1900 &\geq \frac{(8 + 2 \cdot 2) \cdot 5^2}{2} + 2(2 \cdot 5h + h^2) \\ h^2 + 10h - 875 &\leq 0 \quad \frac{D}{4} = 25 + 875 = 900 \\ h &= -5 \pm 30, \quad h_1 = 25, \quad h_2 = -35 \\ -35 \leq h &\leq 25, \quad h_{\text{наиб}} = 25 \end{aligned}$$

Ответ: 25.

- №12. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v – скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ дайте в м/с.

Решение:

$$P \geq 0, \quad m \left(\frac{v^2}{L} - g \right) \geq 0 \text{ и т.к. } m > 0, \text{ то } \frac{v^2}{L} - g \geq 0, \quad \frac{v^2}{0,4} - 10 \geq 0, \quad v^2 \geq 4, \quad v \geq 2 \quad (v > 0)$$

Наименьшее значение $v = 2$.

Ответ: 2.

- №13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Решение:

После открытия крана через время t остается четверть первоначального объема $H_1(t) = \frac{H_0}{4}$.

$$\begin{aligned}\frac{H_0}{4} &= H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 \\ \frac{20}{4} &= 20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{1}{50} \cdot t + \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{2500} \cdot t^2 \\ t^2 - 200t + 7500 &= 0 \quad t_1 = 50 \quad t_2 = 100\end{aligned}$$

По условию задачи t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, значит, по смыслу подходит только $t = 50$ сек. Ответ: 50.

- №14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2$ м – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{50}$ м/мин², и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

Решение:

Поскольку вся вода из бака вытекла, то высота столба воды стала равной 0, т.е. $H(t) = 0$.

$$\frac{1}{50}t^2 - \frac{2}{5}t + 2 = 0, \quad t^2 - 20t + 100 = 0, \quad (t - 10)^2 = 0, \quad t = 10$$

Ответ: 10.

- №15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega = 40^\circ / \text{мин}$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ / \text{мин}^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 3000° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.

Решение:

$$\varphi \leq 3000, \quad \omega t + \frac{\beta t^2}{2} \leq 3000, \quad 40^\circ t + \frac{4^\circ \cdot t^2}{2} - 3000 \leq 0, \quad t^2 + 20t - 1500 \leq 0, \quad -50 \leq t \leq 30,$$

$$t \geq 0, \quad t = 30$$

Ответ: 30.

- №16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

Решение:

$$S \leq 48, \quad v_0 t + \frac{at^2}{2} \leq 48, \quad 58t + \frac{16t^2}{2} - 48 \leq 0, \quad 4t^2 + 29t - 24 \leq 0$$

$$t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{4} \quad t = \frac{3}{4} \text{ часа} = 45 \text{ мин}$$

Ответ: 45.

- №17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах

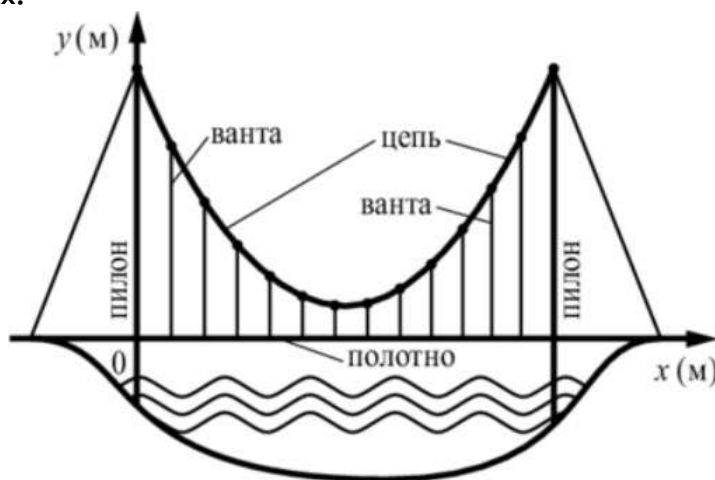
Решение:

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2}, \quad t^2 - 16t + 60 = 0, \quad t_1 = 6 \quad t_2 = 10$$

Время торможения по смыслу задачи $t = 6$.

Ответ: 6.

- №18. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y = 0,001x^2 - 0,29x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



Решение:

$$y = 0,001 \cdot 10^2 - 0,29 \cdot 10 + 25 = 0,1 - 2,9 + 25 = 22,2$$

Ответ: 22,2.

■ Тест

Целые алгебраические уравнения или неравенства

- №1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.
-
- №2. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,7 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,3 с? Ответ выразите в метрах.
-
- №3. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,2 + 10t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?
-
- №4. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{60} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{6}$ – постоянные параметры, x (м) – смещение камня по горизонтали, y (м) – высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?
-
- №5. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -12,5$ К/мин², $b = 175$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.
-
- №6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P – мощность излучения звезды (в Ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная, S – площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T – температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{2} \cdot 10^{18} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $2,85 \cdot 10^{26}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.
-
- №7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho gl^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м³ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 5017,6 Н? Ответ дайте в метрах.

- №8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ дайте в метрах.
-
- №9. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль будет равна 300000 руб.
-
- №10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задается формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ дайте в тыс. руб. за ед.
-
- №11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 4$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 2$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задаётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $1000 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.
-
- №12. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведра сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v – скорость движения ведра в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 72,9 см? Ответ дайте в м/с.
-
- №13. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{500}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

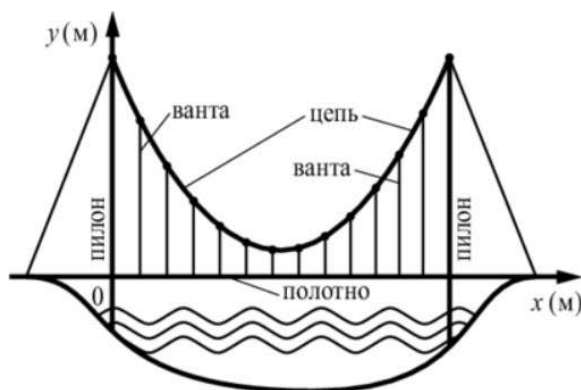
- №14. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4,5$ м - начальный уровень воды, $a = \frac{1}{200}$ м/мин², и $b = -\frac{3}{10}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

- №15. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega = 30^\circ / \text{мин}$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 3^\circ / \text{мин}^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ дайте в минутах.

- №16. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 40$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 64$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ дайте в минутах.

- №17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 15$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 2$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 36 метров. Ответ дайте в секундах.

- №18. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называют вантами. введем систему координат: ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задается формулой $y = 0,0011x^2 - 0,32x + 26$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 20 метрах от пилон. Ответ дайте в метрах.



▪ **Ответы (тест)** Целые алгебраические уравнения или неравенства

№1	№2	№3	№4	№5	№6
37,5	1,65	1,6	60	2	10000

№7	№8	№9	№10	№11	№12
0,8	2	4000	12	10	27

№13	№14	№15	№16	№17	№18
250	30	20	45	3	20,04