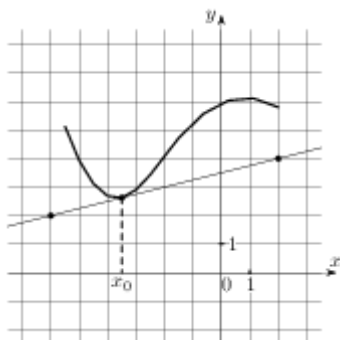


Геометрический смысл производной

№1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



На касательной отмечены точки с координатами: $(x_1; y_1) = (-6; 2)$ и $(x_2; y_2) = (2; 4)$.

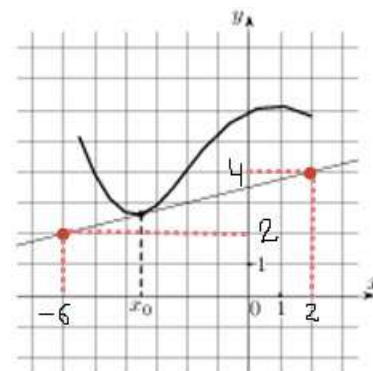
Угловой коэффициент прямой вычислим

$$\text{по формуле: } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$k = \frac{4 - 2}{2 - (-6)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

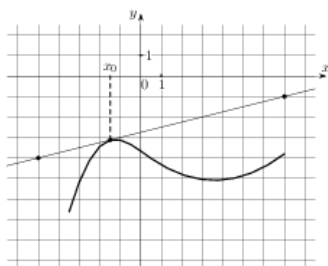
Исходя из геометрического смысла производной, получим

$$f'(x_0) = k = 0,25.$$



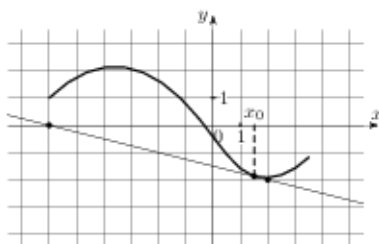
Ответ: 0,25.

№1а. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



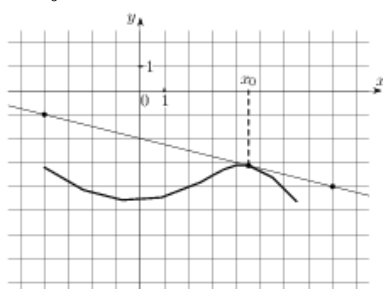
Ответ: 0,25.

№1б. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



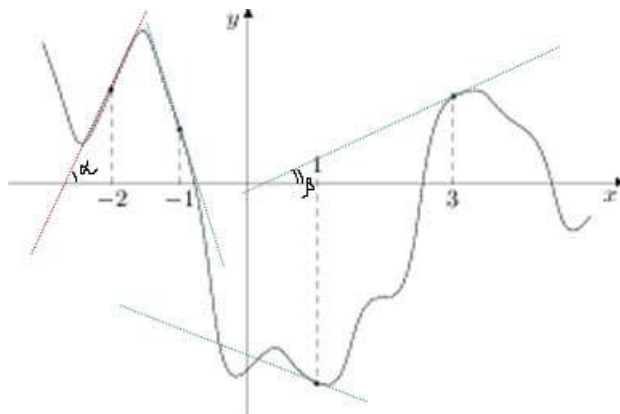
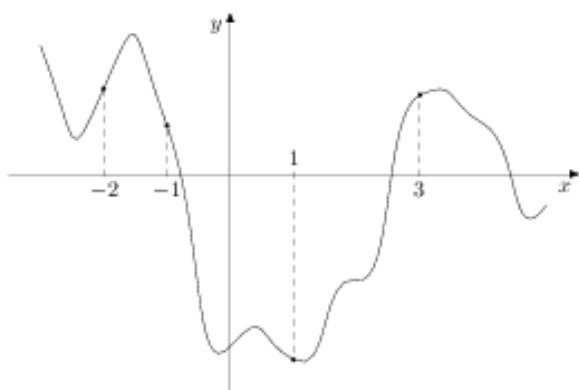
Ответ: - 0,25.

№1в. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: - 0,25.

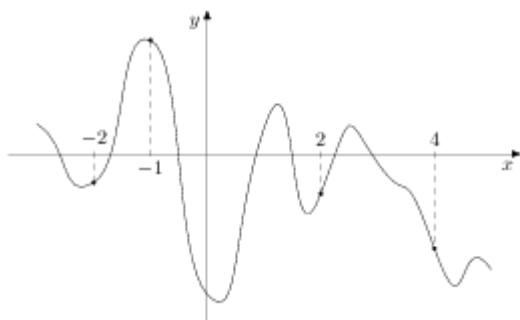
№2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Проведем касательные к графику функции в заданных точках. Исходя из геометрического смысла производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$, имеем, что наибольшее значение производной функции будет в той точке, где угловой коэффициент касательной наибольший. Углы α и β - острые, поэтому $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \beta > 0$ и т. к. $\alpha > \beta$, то $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$. Поэтому $f'(-2) > f'(3)$. В точке (-2) значение производной наибольшее.

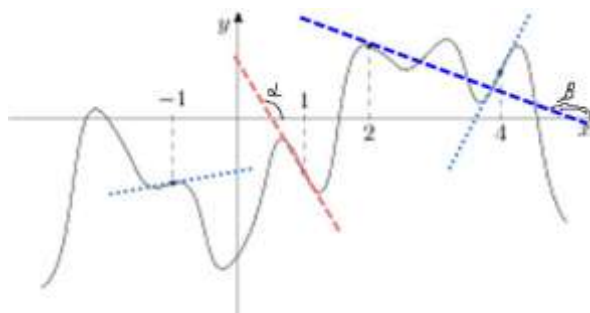
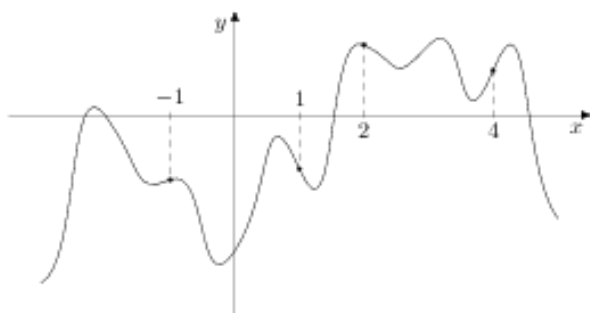
Ответ: -2.

№2а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: 2.

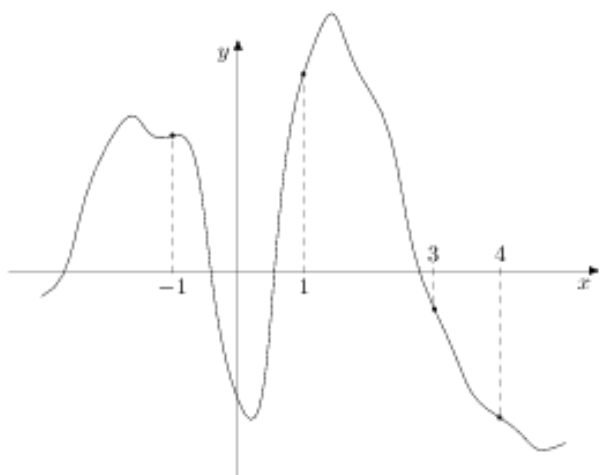
№3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Проведем касательные к графику функции в заданных точках. Исходя из геометрического смысла производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$, имеем, что наименьшее значение производной функции будет в той точке, где угловой коэффициент касательной наименьший. Углы α и β - тупые, поэтому $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \beta < 0$ и т.к. $\alpha < \beta$, то $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$. Поэтому $f'(1) < f'(2)$. В точке 1 значение производной наименьшее.

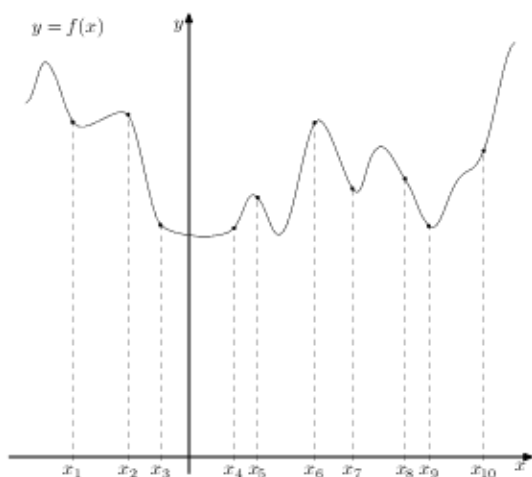
Ответ: 1.

№3а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



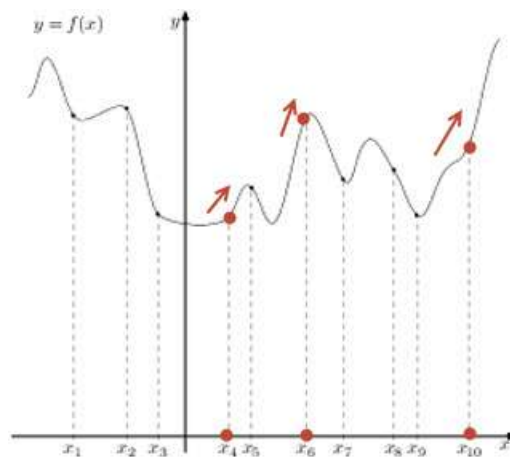
Ответ: 3.

№4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции положительна?



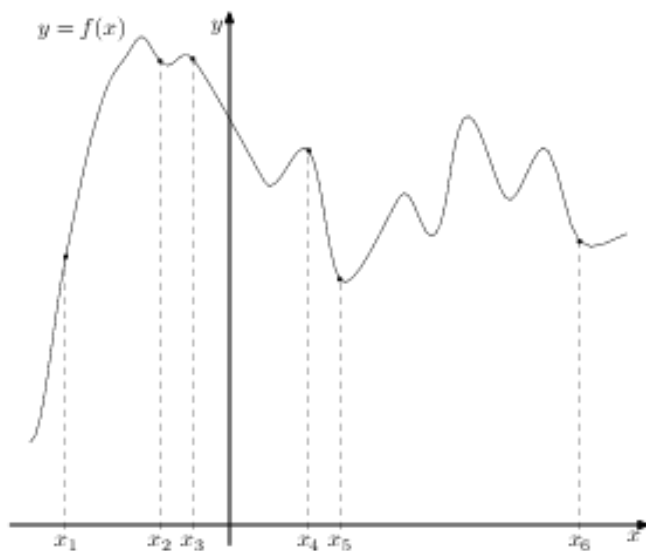
Производная функции положительна в точке, в которой угловой коэффициент касательной положителен. $f'(x) = k > 0$ — острый угол.

Всего 3 точки.



Ответ: 3.

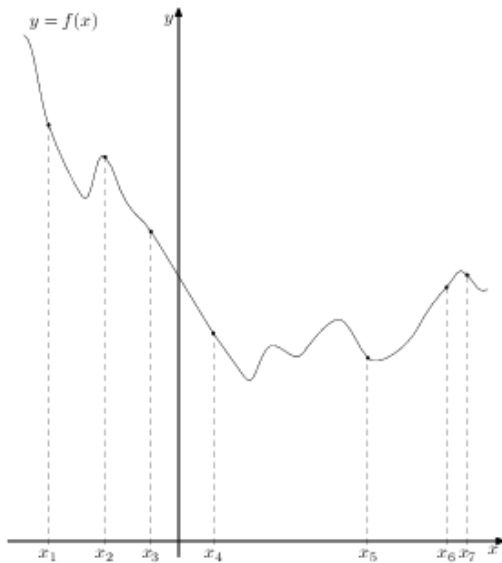
№4а. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f'(x)$ положительна?



Ответ: 1.

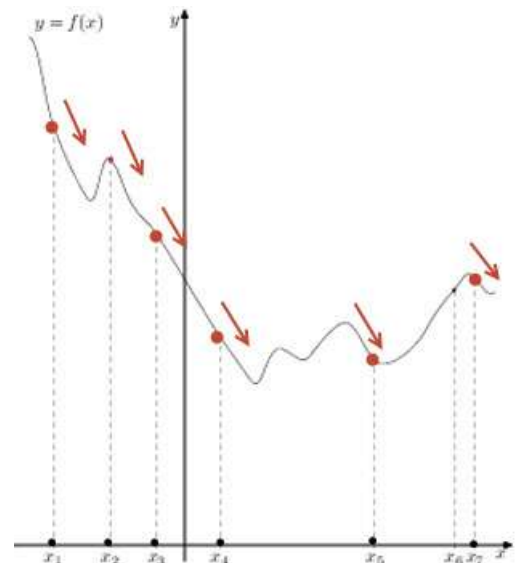
№5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$.

В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Производная функции отрицательна в точке, в которой угловой коэффициент касательной отрицателен. $f'(x) = k < 0$ — тупой угол.

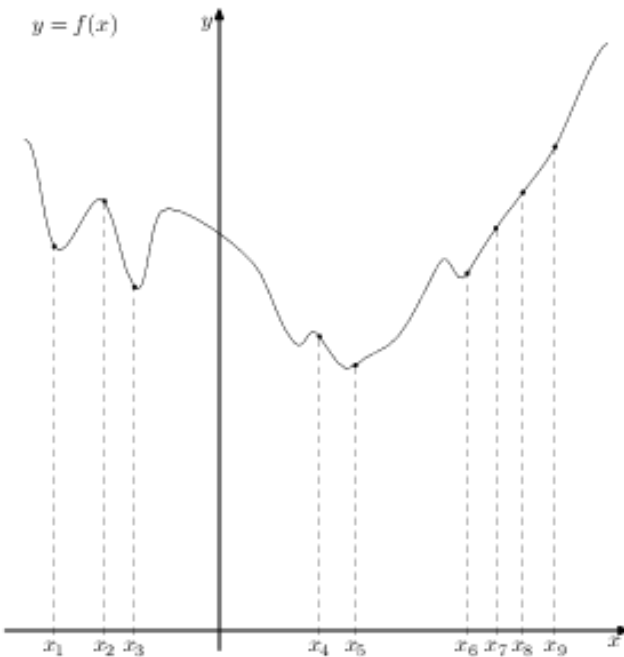
Всего 6 точек.



Ответ: 6.

№5а. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$.

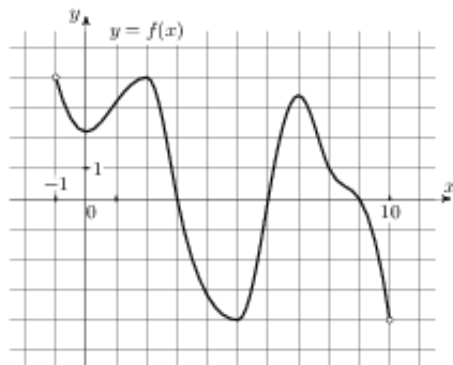
В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



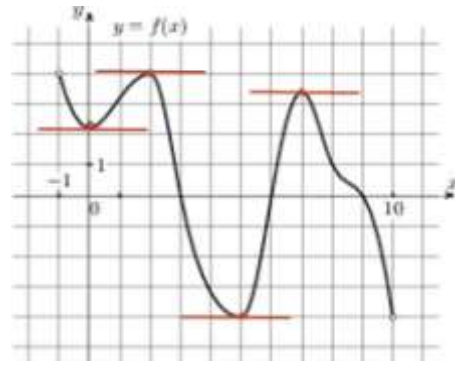
Ответ: 4.

№6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 10)$.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

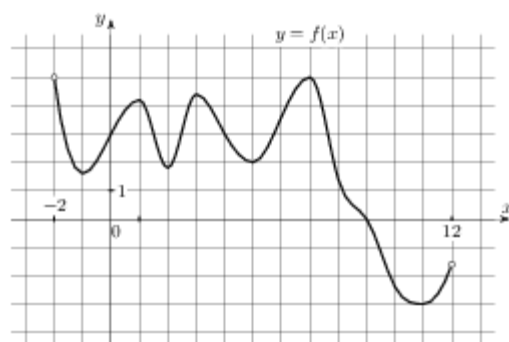


Прямые вида $y = \text{const}$ параллельны оси OX .
Таких точек, в которых касательные параллельны оси OX на графике 4.



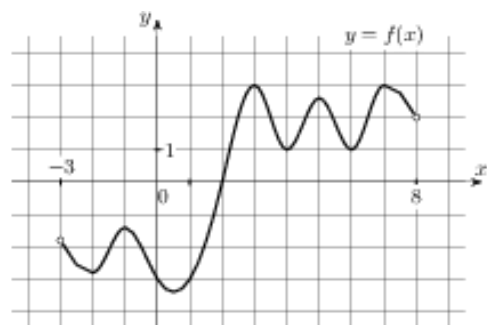
Ответ: 4.

№7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.



а) На интервале $(-2; 12)$ найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 7$.

Ответ: 7.

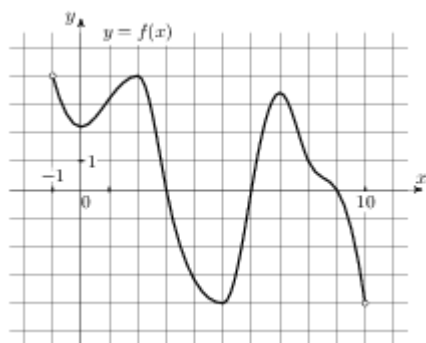


б) На интервале $(-3; 8)$ найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.

Ответ: 8.

№8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 10)$.

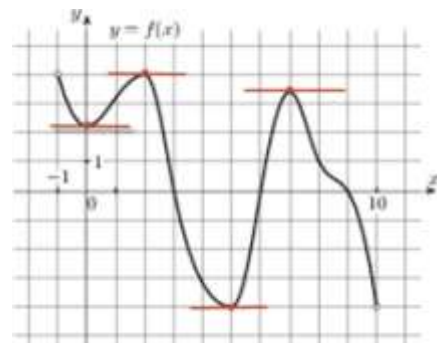
Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Исходя из геометрического смысла производной:

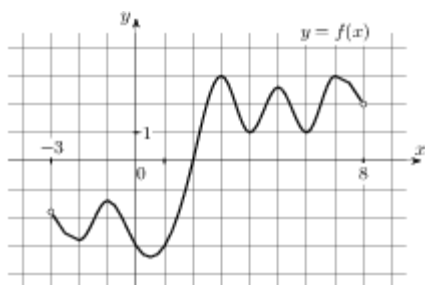
$$f'(x_0) = \tan \alpha = k = 0,$$

Угловым коэффициентом касательной равен 0, поэтому касательные параллельны оси OX . Таких точек на графике 4.



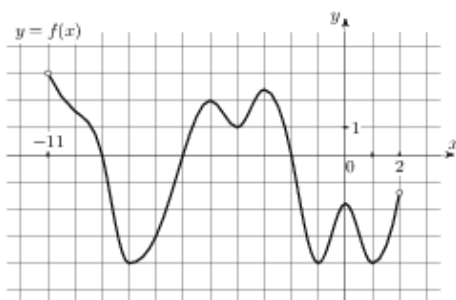
Ответ: 4.

№9. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



а) на интервале $(-3; 8)$.

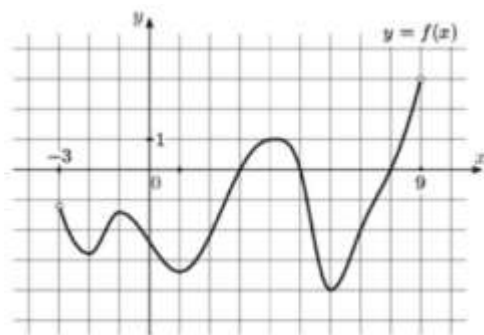
Ответ: 8.



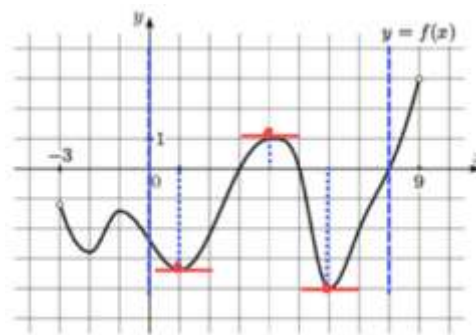
б) на интервале $(-11; 2)$.

Ответ: 7.

№10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0; 8]$.

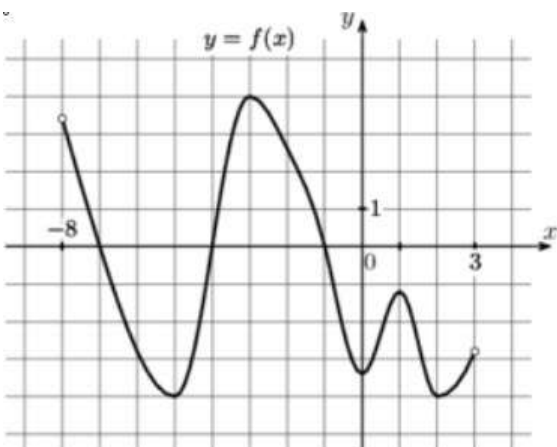


$f'(x) = 0$,
значит, угловой
коэффициент
касательной
 $k = 0$ и она
параллельна оси
 x . Всего на
заданном отрезке
3 точки.
Количество
корней уравнения
3.



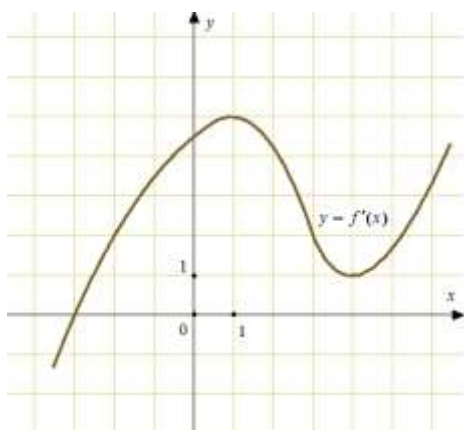
Ответ: 3.

№10а. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-7; -1]$.

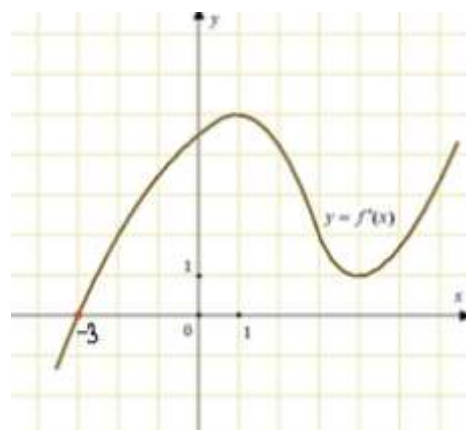


Ответ: 2.

№11. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

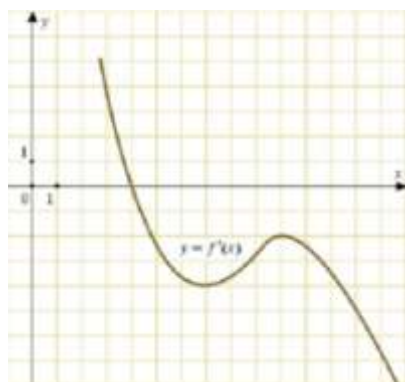


Касательные к графику функции параллельные оси абсцисс или совпадающие с ней имеют угловой коэффициент равный 0, т.е. $f'(x_0) = k = 0$.
Найдем на графике производной функции точку, где $f'(x_0) = 0$.
Это точка с абсциссой $x_0 = -3$



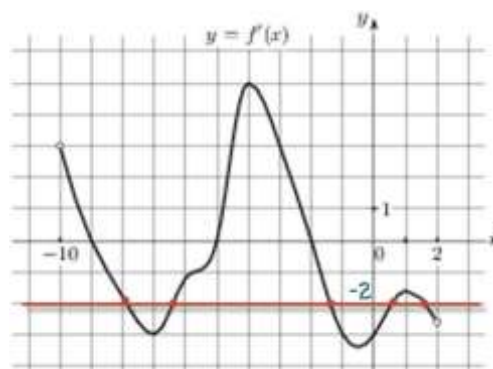
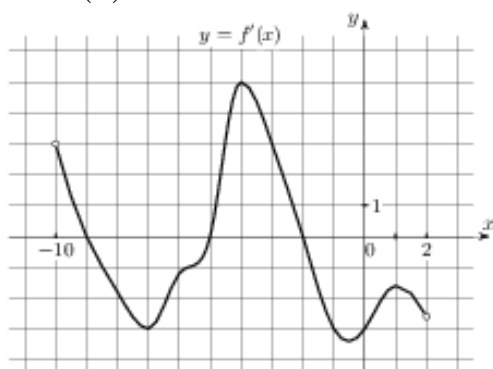
Ответ: -3.

№11а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: 4.

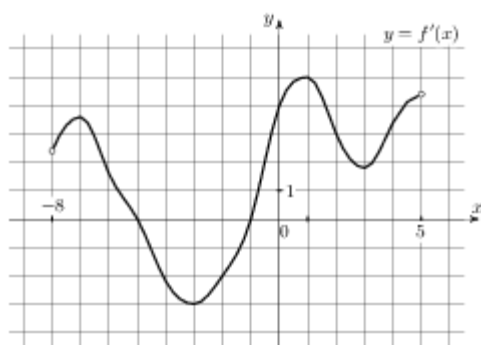
№12. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой $k = -2$ равен угловому коэффициенту касательной к графику функции. Исходя из геометрического смысла производной, имеем: $f'(x_0) = \tan \alpha = k$. Поэтому $f'(x_0) = -2$. Отметим это число на оси значений производной и найдем абсциссы точек пересечения прямой $f'(x_0) = -2$ с графиком производной функции. Всего таких точек 5.

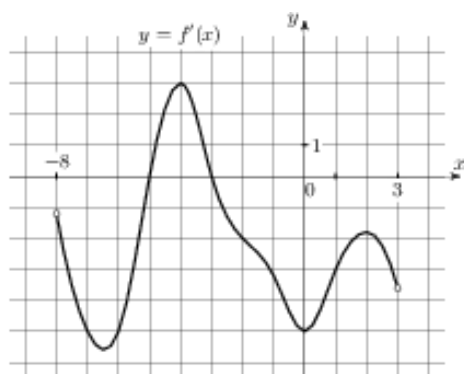
Ответ: 5.

№12а. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 17$ или совпадает с ней.



Ответ: 5.

№12б. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x - 15$ или совпадает с ней.



Ответ: 2.

№13. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение:

Если $a = 0$, то прямые $y = 2x + 3$ и $y = 3x + 1$ пересекаются.

Если $a \neq 0$, то прямая $y = 3x + 1$ является касательной к параболе $y = ax^2 + 2x + 3$, если они имеют только одну общую точку.

Значит, система уравнений $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = ax^2 + 2x + 3 \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Решим соответствующее квадратное уравнение $3x + 1 = ax^2 + 2x + 3$ и найдем при каком значении a оно имеет единственное решение.

$$3x + 1 = ax^2 + 2x + 3$$

$$ax^2 - x + 2 = 0, \quad D = 1 - 4 \cdot a \cdot 2 = 1 - 8a$$

$$D = 0, \quad 1 - 8a = 0, \quad a = \frac{1}{8} = 0,125$$

Ответ: 0,125.

№13а. Прямая $y = -x - 2$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 17x + 1$. Найдите a .

Ответ: 27.

№13б. Прямая $y = -3x - 8$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 27x + 7$. Найдите a .

Ответ: 15.

№14. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$.

Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение:

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к параболе $y = 28x^2 + bx + 15$, если они имеют только одну общую точку.

Значит, система уравнений $\begin{cases} y = -5x + 8 \\ y = 28x^2 + bx + 15 \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Решим соответствующее квадратное уравнение $-5x + 8 = 28x^2 + bx + 15$ и найдем при каких значениях b оно имеет единственное решение.

$$-5x + 8 = 28x^2 + bx + 15$$

$$28x^2 + (b+5)x + 7 = 0, \quad D = (b+5)^2 - 4 \cdot 28 \cdot 7 = (b+5)^2 - 28^2 = (b+5-28)(b+5+28) = (b-23)(b+33)$$

$$D = 0, \quad b_1 = 23, \quad b_2 = -33$$

Если $b = 23$, то $28x^2 + 28x + 7 = 0$, $4x^2 + 4x + 1 = 0$, $x_0 = -\frac{1}{2} < 0$

Если $b = -33$, то $28x^2 - 28x + 7 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2} > 0$.

Ответ: -33.

№14а. Прямая $y = -6x + 1$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 + bx + 2$.

Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: -2.

№146. Прямая $y = -9x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^2 + bx + 2$.

Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ: -15.

№14в. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Ответ: 7.

№15. Прямая $y = 8x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение:

Исходя из геометрического смысла производной, имеем $f'(x_0) = k$. Поскольку прямая $y = 8x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - x + 9$, то $k = 8$. Для нахождения абсциссы точки касания, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} (x^3 + 3x^2 - x + 9)' = 8 \\ x^3 + 3x^2 - x + 9 = 8x + 4 \end{cases} ; \begin{cases} 3x^2 + 6x - 1 = 8 \\ x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} ; x = 1 \text{ (проверкой)} \\ x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 1.

№15а. Прямая $y = 5x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 9x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: -2.

№156. Прямая $y = -6x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: 1.