Угол между плоскостями.
Куб и прямоугольный параллелепипед (продолжение)

▪ *Примеры*

№1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны 10 и $13\frac{1}{3}$, а боковое ребро равно $4\sqrt{3}$. Через вершину D_1 и середины ребер AD и CD проведена секущая плоскость. Найти косинус угла между секущей плоскостью и плоскостью $ABCD$.

№2. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а боковое ребро равно 7. На ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостями D_1MK и CC_1D_1.

№3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 2{,}5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 4:1$, где $P -$ точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

№4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD -$ квадрат со стороной $2\sqrt{3}$, ребро AA_1 равно 3. На ребрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2:1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1.

№5. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD -$ квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6,\ AB = 4$.

№6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка $K -$ середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что расстояние от вершины A_1 до прямой BK равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями KBA_1 и BCC_1.

▪ *Ответы (примеры)* Угол между плоскостями. Куб и прямоугольный параллелепипед (продолжение)

№1	№2	№3	№4	№5	№6
60	*45*	$arctg\frac{\sqrt{37}}{5}$	*45*	$arctg\frac{5}{3}$	$\arccos\frac{2}{3}$

▪ *Тест* Угол между плоскостями. Куб и прямоугольный параллелепипед (продолжение)

№1. Через концы трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{1}{8}$. Длины сторон основания равны 5 и 3. Определить площадь полученного сечения.

№2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AB_1D и AB_1D_1. (Есть видео комментарий)

№3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=1,6$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где $P-$ точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

№4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD-$ квадрат со стороной 3, ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На ребрах C_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $D_1K=KC_1$, а $DM:MD_1=1:3$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABB_1.

№5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB=12$, $AA_1=12$, $AD=8$. Точка $K-$ середина ребра C_1D_1, а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4:1, считая от вершины B_1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1, считая от вершины C_1.

б) Найдите угол между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

▪ *Ответы (тест)* Угол между плоскостями. Куб и прямоугольный параллелепипед (продолжение)

№1	№2	№3	№4	№5
60	*45*	$arctg\frac{\sqrt{26}}{4}$	$arctg\frac{2\sqrt{21}}{7}$	*а) 2:3; б) 45.*

(1) Угол между плоскостями

https://mathcourse.ru/lessons/21_11_1_1-dvugrannyj-ugol-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.*

(2) Следствие из признака параллельности двух плоскостей

https://mathcourse.ru/lessons/21_4_1-parallelnost-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*

(3) Теорема о трех перпендикулярах (прямая и обратная)

https://mathcourse.ru/lessons/21_8_2_1-teorema-o-treh-perpendikulyarah-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной* (прямая теорема).
- ✓ *Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции (обратная теорема).*

(4) Признак перпендикулярности прямой и плоскости

https://mathcourse.ru/lessons/21_7_2-priznak-perpendikulyarnosti-pryamoj-i-ploskosti-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

(6) Признак перпендикулярности двух плоскостей

https://mathcourse.ru/lessons/21_11_2-priznak-perpendikulyarnosti-dvuh-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.*

(8) Взаимное расположение прямых в пространстве

- ✓ https://mathcourse.ru/lessons/21_3_1_2-dopolnitelnye-zadachi-po-teme-vzaimnoe-raspolozhenie-pryamyh-v-prostranstve/

(9) Сечение параллелепипеда плоскостью

https://mathcourse.ru/lessons/21_6_1-parallelepiped-secheniya-parallelepipeda-ploskostyu-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ *Секущей плоскость параллелепипеда* назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного параллелепипеда.
- ✓ Секущая плоскость пересекает грани параллелепипеда по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется *сечением параллелепипеда*.

(10) Угол между плоскостями как угол между плоскостью многоугольника и его ортогональной проекцией

https://mathcourse.ru/lessons/21_11_2-priznak-perpendikulyarnosti-dvuh-ploskostej-konspekt-uroka-i-video/

- ✓ Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостями многоугольника и его ортогональной проекции на некоторую плоскость.

$S_{\substack{ортогональной\ проекции \\ многоугольника}} = S_{многоугольника} \cdot \cos\alpha$, где $\alpha -$ угол между плоскостями многоугольника и его ортогональной проекцией на некоторую плоскость.