- 11 класс/Показательные неравенства
- ЕГЭ Профиль/ *Задание №15*

Методы решения показательных неравенств (продолжение)

1. Сведение к квадратным неравенствам
2. Однородные второй степени
3. Сведение к рациональным неравенствам

1. Сведение к квадратным неравенствам

▪ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $3^{8x}-4\cdot 3^{4x}<-3$

№2. $2^{-x}\cdot\left(0,5^{x}+2^{x+3}-6\right)<0$

№3. $2^{2x+3}+2<2^{x+4}+2^{x}$

№4. $2^{1+x^2}+2^{1-3x^2}<5\cdot 2^{-x^2}$

№5. $6^{\sqrt{x-2}}-2<\dfrac{24}{6^{\sqrt{x-2}}}$

№6. $9^{\sqrt{x^2-1}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-1}-1}$

№7. $2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8\le 2^{\frac{2x}{x+1}}$

№8. $\left(9\cdot 5^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}-50\left(5\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right)^{x-2}\ge 5^{x}$

№9. $\left(4^{x}-2^{x+2}\right)^{2}-28\left(4^{x}-2^{x+2}\right)-128\ge 0$

№10. $27\cdot 45^{x}-27^{x+1}-12\cdot 15^{x}+12\cdot 9^{x}+5^{x}-3^{x}\le 0$

№11. $25^{\frac{1}{x}-1}-3\cdot 5^{\frac{1}{x}-1}+2\ge 0$

▪ *Тест* 1. Сведение к квадратным неравенствам

Вариант 1

Решите неравенства:

№1.	$11^{\sqrt{x}}-10<\dfrac{11}{11^{\sqrt{x}}}$	№2.	$5^{4x-1}+1<6\cdot 5^{2x-1}$
№3.	$3^{1+3x^2}+3^{1-x^2}\le 10\cdot 3^{x^2}$	№4.	$2^{\sqrt{x-1,5}}+2^{3-\sqrt{x-1,5}}<6$
№5.	$9^{x+\frac{1}{9}}-4\cdot 3^{x+\frac{10}{9}}+27\ge 0$	№6.	$\left(9^x-2\cdot 3^x\right)^2-62\left(9^x-2\cdot 3^x\right)-63\ge 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1.	$0,1^{x+1}\cdot\left(0,1^x+0,1^{-x-1}-11\right)<0$	№2.	$4^x+85<11\cdot 2^{x+1}$
№3.	$3^{2x^2+1}+3^{4x}<4\cdot 3^{x^2+2x}$	№4.	$16^{\sqrt{x^2-2}}+4>65\cdot 4^{\sqrt{x^2-2}-1}$
№5.	$81^{\frac{3}{4}-x}-730\cdot 9^{-x}+27\le 0$	№6.	$9^{4x-x^2-1}-36\cdot 3^{4x-x^2-1}+243\ge 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1.	$5^x\left(5^x+5^{4-x}-130\right)<0$	№2.	$2\cdot 3^x-4\cdot 3^{1-x}<5$
№3.	$3^{-\sqrt{x}}\left(3^{1-\sqrt{x}}+6\right)+8\cdot 9^{-\sqrt{x}+0,5}\ge 1$	№4.	$\left(7\cdot 6^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}-6\left(6\cdot 7^{\frac{1}{x}}\right)^{x-1}\ge 6^{x+1}$
№5.	$25^{2-3x}-7\cdot 5^{2-3x}+6\le 0$	№6.	$4^{x-\frac{1}{2}}-17\cdot 2^{x-2}+2\le 0$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1.	$2\cdot 16^{-x}-17\cdot 4^{-x}+8\le 0$	№2.	$6^x\left(\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-x}+6^{2-x}-37\right)\le 0$
№3.	$9^{\frac{3}{2}-x}-244\cdot 3^{-x}+9\le 0$	№4.	$4^{2x-3}-4\cdot 2^{2x-1}+48\le 0$
№5.	$5^{x+1}+3\cdot 5^{-x}\le 16$	№6.	$\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)\le 96$

Вариант 5

Решите неравенства:

№1.	$9^x - 10\cdot 3^{x+1} + 81 \ge 0$	№2.	$(0,2)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(5^{1-\frac{2}{x}}+24\right)\ge 5$
№3.	$2^x + 3\cdot 2^{-x} \le 4$	№4.	$4^{x-3} - 71\cdot 2^{x-6} + 7 \le 0$
№5.	$\left(25^x - 4\cdot 5^x\right)^2 + 8\cdot 5^x < 2\cdot 25^x + 15$	№6.	$0,5^{2x+5} - 2\cdot 0,5^{x+3} - 64\cdot 0,5^{x+2} + 128 \le 0$
№7.	$9^{\frac{1}{x}-1} - 3\cdot 3^{\frac{1}{x}-1} + 2 \ge 0$		

- ***Ответы (тест)*** 1. Сведение к квадратным неравенствам

	Вар.1	Вар.2	Вар.3	Вар.4	Вар.5
№1	$[0;1)$	$(-1;0)$	$(1;3)$	$[-1,5;0,5]$	$(-\infty;1];[3;\infty)$
№2	$(0;0,5)$	$(\log_2 5;\log_2 17)$	$(-\infty;\log_3 4)$	$[0;2]$	$(-\infty;0)$; $[2;\infty)$
№3	$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$(0;1)$; $(1;2)$	$[0;4]$	$[-2;3]$	$[0;\log_2 3]$
№4	$(2,5;5,5)$	$\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)$; $\left(\sqrt{6};\infty\right)$	$(0;1]$	$\left[\frac{5}{2};\frac{5}{2}+\frac{\log_2 3}{2}\right]$	$[\log_2 7;6]$
№5	$\left(-\infty;\frac{8}{9}\right]$; $\left[\frac{17}{9};\infty\right)$	$[-1,5;1,5]$	$\left[\frac{2-\log_5 6}{3};\frac{2}{3}\right]$	$[-1;\log_5 3]$	$(-\infty;0)$; $(\log_5 3;1)$
№6	$0;[2;\infty)$	$(-\infty;1];2;$ $[3;\infty)$	$[-1;3]$	$(-\infty;0];[2;3]$	$[-9;-3]$
№7					$(-\infty;0)$; $(0;\log_6 3]$; $[1;\infty)$

2. Однородные второй степени

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $16^x - 12^x - 2\cdot 9^x \le 0$

№2. $2\cdot 7^{\frac{4}{\sqrt{x}}} - 14^{\frac{2}{\sqrt{x}}} > 21\cdot 16^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

№3. $9\cdot 2^{\frac{x^2+1}{x^2}} - 85\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} + 2\cdot 9^{1+\frac{1}{x^2}} \ge 0$

№4. $5\cdot 9^{\sqrt{x+2}} + (15)^{\sqrt{x+2}+1} - 3\cdot 5^{1+2\sqrt{x+2}} + 7\cdot 15^{\sqrt{x+2}} \ge 0$

№5. $25\cdot 4^{\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} - 133\cdot 10^{-\frac{2}{x}} + 4\cdot 5^{1-\frac{4}{x}} \le 0$

№6. $25^{2x^2-0,5} - 0,6\cdot 4^{2x^2+0,5} \le 10^{2x^2}$

▪ *Тест* 2. Однородные второй степени

Решите неравенства:

№1.	$9^x - 2\cdot 6^x - 3\cdot 4^x \le 0$	№2.	$36^x - 2\cdot 5^{2x} + 30^x > 0$
№3.	$(0,5)^{1-\frac{2}{x}} > 10^{\frac{1-x}{x}} + (25)^{\frac{1}{x}-1}$	№4.	$4\cdot 9^{1-\frac{5}{x}} - 91\cdot 12^{-\frac{5}{x}} + 3\cdot 4^{2-\frac{10}{x}} \ge 0$
№5.	$3\cdot 25^{x+0.5} + 4^{2x+1,5} \le 22\cdot 20^x$	№6.	$4^{2x+1,5} - 9^{x+0,5} \ge 2\cdot 12^x$

▪ *Ответы (тест)* 2. Однородные второй степени

№1	№2	№3	№4	№5	№6
$\left(-\infty; \log_{\frac{3}{2}} 3\right]$	$(0;\infty)$	$(-\infty;0)\cup(1;\infty)$	$[-5;0)\cup(0;2,5]$	$\left[-\log_{\frac{5}{4}}\frac{3}{2};-1\right]$	$[-1;\infty)$

3. Сведение к рациональным неравенствам

■ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\dfrac{3\cdot 7^{1-x}-4}{1-7^x}\le\dfrac{1}{7^{-x}-1}$

№2. $\dfrac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^x-32}\le 1$

№3. $\dfrac{2^{x+\log_2 5}-6}{1-(0,5)^{x-2}}\ge 2^x$

№4. $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$

№5. $\dfrac{6}{1-2\cdot 2^x}-\dfrac{1}{1-4\cdot 2^x}\le\dfrac{3}{2^{x+2}}$

№6. $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^x+10\cdot 3^x-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^x+3}\le 3^x+\dfrac{1}{3^x-2}+\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$

№7. $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$

№8. $\dfrac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}}\ge 2^x$

№9. $2\cdot\dfrac{125^x-1}{5^x-1}+\dfrac{12}{25^x+5^x+1}\le 11$

№10. $\dfrac{8^x}{18^x-27^x}+\dfrac{4\left(4^x-6^x\right)}{4^x-2\cdot 6^x+9^x}\le\dfrac{4^{x+1}}{6^x-9^x}$

■ *Тест* 3. Сведение к рациональным неравенствам

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{10\cdot 3^x-18}{3^x-3}\geq 3^x+3$

№2. $\dfrac{1}{5^x+31}\leq\dfrac{4}{5^{x+1}-1}$

№3. $\dfrac{5^{x+2}-3\cdot 5^{x+1}-26}{5^x-1}\geq 5^x+1$

№4. $\dfrac{567-9^{-x}}{81-3^{-x}}\geq 7$

№5. $\dfrac{6}{2^{x-2}-2}-\dfrac{1}{2^{x-2}-4}\leq\dfrac{3}{4}$

№6. $\dfrac{28}{\left(2^{7-x^2}-4\right)^2}+\dfrac{1}{2^{7-x^2}-4}-2\geq 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{1}{5^{-x}-1}\geq\dfrac{2-3\cdot 5^{1-x}}{5^x-1}$

№2. $\dfrac{4^{x-0,5}+1}{9\cdot 4^x-16^{x+0,5}-2}\leq 0,5$

№3. $\dfrac{8^x-5\cdot 2^x}{2^x-2^{4-x}}\geq 0$

№4. $\dfrac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geq 0,5$

№5. $\dfrac{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+1}+\dfrac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\leq\dfrac{2\cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}$

№6. $\dfrac{14}{\left(4^{5-x^2}-2\right)^2}+\dfrac{1}{4^{5-x^2}-2}-4\geq 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4}\geq 2^x+4$

№2. $\dfrac{25^x-28}{5^x-6}\geq 3$

№3. $\dfrac{9^x-3^{x+1}-19}{3^x-6}+\dfrac{9^{x+1}-3^{x+4}+2}{3^x-9}\leq 10\cdot 3^x+3$

№4. $\dfrac{5\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^x}\geq 1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

№5. $\dfrac{375\cdot 5^x-5^{-x}}{5\cdot 5^{-x}-25^{-x}}\geq 5^x$

№6. $\dfrac{2^{2x+2}-9\cdot 2^{x+2}+32}{2^{x+3}-2^{2x}}\leq\dfrac{3}{2^x}$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $\frac{2}{7^x-7} \ge \frac{5}{7^x-4}$

№2. $\frac{3^x-1}{3^x-3} \le 1+\frac{1}{3^x-2}$

№3. $\frac{3^{x\log_3 5}+23}{25-(0,2)^x} \le 5^x$

№4. $\frac{30\cdot 5^{x+3}-0,2^{x+1}}{5^{3-x}-25^{1-x}} \ge 5^{x-3}$

№5. $\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1} \ge \frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}$

№6. $3\cdot\frac{8^x-1}{2^x-1}+\frac{20}{4^x+2^x+1} \le 19$

Вариант 5

Решите неравенства:

№1. $\frac{4^x+5}{2^x-11} \ge -1$

№2. $\frac{7^{x+\log_7 2}+28}{7^{2-x}-1} \ge 7^x$

№3. $\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6} \le 0$

№4. $\frac{6\cdot 5^x-11}{25^{x+0,5}-6\cdot 5^x+1} \ge 0,25$

№5. $\frac{3}{3^x-2}-\frac{2(3^{x+2}-9)}{7(3^x-3)} \le -3$

№6. $\frac{64^x}{36^x-27^x}+\frac{4\left(16^x-12^x\right)}{16^x-2\cdot 12^x+9^x} \le \frac{16^{x+\frac{1}{2}}}{12^x-9^x}$

Вариант 6

Решите неравенства:

№1. $\frac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27} \le 1$

№2. $\frac{10^{x\lg 3}-27}{3^{1-x}-9} \le 3^x$

№3. $\frac{25^{x^2+x-10}-(0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5\cdot 4^{x-1}-1} \le 0$

№4. $\frac{2^{2x+3}-5\cdot 2^{x+3}+32}{2^{x+2}-2^{2x}} \le \frac{7}{2^x}$

№5. $\frac{1}{3^x-1}+\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-3^{x+3}+3}{3^x-9} \ge 3^{x+1}$

№6. $\frac{27^x}{12^x-8^x}+\frac{9^{x+1}-\frac{3}{2}\cdot 6^{x+1}}{9^x-2\cdot 6^x+4^x} \le \frac{2\cdot 9^{x+\frac{1}{2}}}{6^x-4^x}$

▪ *Ответы (тест)* 3. Сведение к рациональным неравенствам

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$(-\infty;0]$; $(1;2]$	$(-1;3]$	$(-\infty;0)$; $\{1\}$	$(-\infty;-4)$; $[-\log_3 7;\infty)$	$(-\infty;3)$; $\left(4;\log_2 \frac{56}{3}\right]$; $[5;\infty)$	$\left[-\sqrt{8};-\sqrt{5}\right)$; $\left(-\sqrt{5};-2\right]$; $\left[2;\sqrt{5}\right);\left(\sqrt{5};\sqrt{8}\right]$
Вар.2	$(0;\log_5 3]$	$(-\infty;-1);0;$ $(0,5;\infty)$	$\left(-\infty;\log_2 \sqrt{5}\right]$; $(2;\infty)$	$0;(1;2)$	$(-\infty;-1)$; $(-1;0)$; $[1;\log_3 4)$	$\left[-\sqrt{6};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\right]$; $\left[2;\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{6}\right]$
Вар.3	$(-\infty;0]$; $(2;3]$	$(-\infty;1]$; $(\log_5 6;\infty)$	$(-\infty;1]$; $(\log_3 6;2)$	$(0;1]$	$(-\infty;-\log_3 45]$; $(-1;\infty)$	$[-2;3)$; $(3;\infty)$
Вар.4	$(-\infty;\log_7 4)$; $(1;\log_7 9]$	$(-\infty;0]$; $(\log_3 2;1)$	$(-\infty;-2)$; $[0;\infty)$	$(-\infty;-4-\log_3 6]$; $(-1;\infty)$	$(-\infty;0)$; $\frac{1}{3};\left(\frac{2}{3};\infty\right)$	$\left[\log_5 \frac{\sqrt{3}-1}{2};0\right)$; $\left(0;\log_5 \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$
Вар.5	$(-\infty;1]$; $(\log_2 11;\infty)$	$[1;2)$	$\{0\};(1;\log_2 3)$	$(-1;0)$; $\log_5 3$	$[0;\log_3 2)$; $(1;2]$	$(-\infty;0)$; $\left\{\log_{\frac{4}{3}} 2\right\}$
Вар.6	$[2;3)$	$(-\infty;-1)$; $[1;\infty)$	$(-\infty;-3]$; $(1,5;3]$	$[-3;2)$; $(2;\infty)$	$(0;1];(2;\infty)$	$(-\infty;0)$; $\left\{\log_{\frac{3}{2}} 3\right\}$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a>1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0<a<1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a, b>0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b=a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right) \cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a>1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить*

   множителем $\left(f(x)-g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0<a<1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить*

   противоположным множителем $\left(g(x)-f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x) \lg f(x) \vee h(x) \lg f(x)$$
$$\left(g(x)-h(x)\right) \cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0=1$	$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$a^n \cdot a^m=a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$