Сведение к рациональным неравенствам

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\dfrac{3\cdot 7^{1-x}-4}{1-7^{x}}\le \dfrac{1}{7^{-x}-1}$

№2. $\dfrac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^{x}-32}\le 1$

№3. $\dfrac{2^{x+\log_2 5}-6}{1-(0,5)^{x-2}}\ge 2^{x}$

№4. $2^{x}-6-\dfrac{9\cdot 2^{x}-37}{4^{x}-7\cdot 2^{x}+12}\le \dfrac{1}{2^{x}-4}$

№5. $\dfrac{6}{1-2\cdot 2^{x}}-\dfrac{1}{1-4\cdot 2^{x}}\le \dfrac{3}{2^{x+2}}$

№6. $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}}-10\cdot 9^{x}+10\cdot 3^{x}-5}{9^{x+\frac{1}{2}}-10\cdot 3^{x}+3}\le 3^{x}+\dfrac{1}{3^{x}-2}+\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$

№7. $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\ge 0$

№8. $\dfrac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}}\ge 2^{x}$

№9. $2\cdot\dfrac{125^{x}-1}{5^{x}-1}+\dfrac{12}{25^{x}+5^{x}+1}\le 11$

№10. $\dfrac{8^{x}}{18^{x}-27^{x}}+\dfrac{4\left(4^{x}-6^{x}\right)}{4^{x}-2\cdot 6^{x}+9^{x}}\le \dfrac{4^{x+1}}{6^{x}-9^{x}}$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $\frac{10\cdot 3^x-18}{3^x-3}\ge 3^x+3$

№2. $\frac{1}{5^x+31}\le\frac{4}{5^{x+1}-1}$

№3. $\frac{5^{x+2}-3\cdot 5^{x+1}-26}{5^x-1}\ge 5^x+1$

№4. $\frac{567-9^{-x}}{81-3^{-x}}\ge 7$

№5. $\frac{6}{2^{x-2}-2}-\frac{1}{2^{x-2}-4}\le\frac{3}{4}$

№6. $\frac{28}{\left(2^{7-x^2}-4\right)^2}+\frac{1}{2^{7-x^2}-4}-2\ge 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\frac{1}{5^{-x}-1}\ge\frac{2-3\cdot 5^{1-x}}{5^x-1}$

№2. $\frac{4^{x-0,5}+1}{9\cdot 4^x-16^{x+0,5}-2}\le 0,5$

№3. $\frac{8^x-5\cdot 2^x}{2^x-2^{4-x}}\ge 0$

№4. $\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\ge 0,5$

№5. $\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+1}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}$

№6. $\frac{14}{\left(4^{5-x^2}-2\right)^2}+\frac{1}{4^{5-x^2}-2}-4\ge 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $\frac{9\cdot 2^x-24}{2^x-4}\ge 2^x+4$

№2. $\frac{25^x-28}{5^x-6}\ge 3$

№3. $\frac{9^x-3^{x+1}-19}{3^x-6}+\frac{9^{x+1}-3^{x+4}+2}{3^x-9}\le 10\cdot 3^x+3$

№4. $\frac{5\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^x}\ge 1+\left(\frac{2}{3}\right)^x$

№5. $\frac{375\cdot 5^x-5^{-x}}{5\cdot 5^{-x}-25^{-x}}\ge 5^x$

№6. $\frac{2^{2x+2}-9\cdot 2^{x+2}+32}{2^{x+3}-2^{2x}}\le\frac{3}{2^x}$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $\frac{2}{7^x-7}\ge\frac{5}{7^x-4}$

№2. $\frac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\frac{1}{3^x-2}$

№3. $\frac{3^{x\log_3 5}+23}{25-(0,2)^x}\le 5^x$

№4. $\frac{30\cdot 5^{x+3}-0,2^{x+1}}{5^{3-x}-25^{1-x}}\ge 5^{x-3}$

№5. $\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\ge\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}$

№6. $3\cdot\frac{8^x-1}{2^x-1}+\frac{20}{4^x+2^x+1}\le 19$

Вариант 5

Решите неравенства:

№1. $\frac{4^x+5}{2^x-11}\ge -1$

№2. $\frac{7^{x+\log_7 2}+28}{7^{2-x}-1}\ge 7^x$

№3. $\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\le 0$

№4. $\frac{6\cdot 5^x-11}{25^{x+0,5}-6\cdot 5^x+1}\ge 0,25$

№5. $\frac{3}{3^x-2}-\frac{2(3^{x+2}-9)}{7(3^x-3)}\le -3$

№6. $\frac{64^x}{36^x-27^x}+\frac{4\left(16^x-12^x\right)}{16^x-2\cdot 12^x+9^x}\le\frac{16^{x+\frac{1}{2}}}{12^x-9^x}$

Вариант 6

Решите неравенства:

№1. $\frac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27}\le 1$

№2. $\frac{10^{x\lg 3}-27}{3^{1-x}-9}\le 3^x$

№3. $\frac{25^{x^2+x-10}-(0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5\cdot 4^{x-1}-1}\le 0$

№4. $\frac{2^{2x+3}-5\cdot 2^{x+3}+32}{2^{x+2}-2^{2x}}\le\frac{7}{2^x}$

№5. $\frac{1}{3^x-1}+\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-3^{x+3}+3}{3^x-9}\ge 3^{x+1}$

№6. $\frac{27^x}{12^x-8^x}+\frac{9^{x+1}-\frac{3}{2}\cdot 6^{x+1}}{9^x-2\cdot 6^x+4^x}\le\frac{2\cdot 9^{x+\frac{1}{2}}}{6^x-4^x}$

- ***Ответы (тест)*** Сведение к рациональным неравенствам

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$(-\infty;0]$; $(1;2]$	$(-1;3]$	$(-\infty;0)$; $\{1\}$	$(-\infty;-4)$; $[-\log_3 7;\infty)$	$(-\infty;3)$; $\left(4;\log_2\frac{56}{3}\right]$; $[5;\infty)$	$\left[-\sqrt{8};-\sqrt{5}\right)$; $\left(-\sqrt{5};-2\right]$; $\left[2;\sqrt{5}\right);\left(\sqrt{5};\sqrt{8}\right]$
Вар.2	$(0;\log_5 3]$	$(-\infty;-1);0;$ $(0,5;\infty)$	$\left(-\infty;\log_2\sqrt{5}\right]$; $(2;\infty)$	$0;(1;2)$	$(-\infty;-1)$; $(-1;0)$; $[1;\log_3 4)$	$\left[-\sqrt{6};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\right]$; $\left[2;\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{6}\right]$
Вар.3	$(-\infty;0]$; $(2;3]$	$(-\infty;1]$; $(\log_5 6;\infty)$	$(-\infty;1]$; $(\log_3 6;2)$	$(0;1]$	$(-\infty;-\log_3 45]$; $(-1;\infty)$	$[-2;3)$; $(3;\infty)$
Вар.4	$(-\infty;\log_7 4)$; $(1;\log_7 9]$	$(-\infty;0]$; $(\log_3 2;1)$	$(-\infty;-2)$; $[0;\infty)$	$(-\infty;-4-\log_3 6]$; $(-1;\infty)$	$(-\infty;0)$; $\frac{1}{3};\left(\frac{2}{3};\infty\right)$	$\left[\log_5\frac{\sqrt{3}-1}{2};0\right)$; $\left(0;\log_5\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$
Вар.5	$(-\infty;1]$; $(\log_2 11;\infty)$	$[1;2)$	$\{0\};(1;\log_2 3)$	$(-1;0)$; $\log_5 3$	$[0;\log_3 2)$; $(1;2]$	$(-\infty;0)$; $\left\{\log_{\frac{4}{3}} 2\right\}$
Вар.6	$[2;3)$	$(-\infty;-1)$; $[1;\infty)$	$(-\infty;-3]$; $(1,5;3]$	$[-3;2)$; $(2;\infty)$	$(0;1];(2;\infty)$	$(-\infty;0)$; $\left\{\log_{\frac{3}{2}} 3\right\}$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a > 1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0 < a < 1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a, b > 0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b = a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right) \cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a > 1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x) - g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0 < a < 1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x) - f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x)\lg f(x) \vee h(x)\lg f(x)$$
$$\left(g(x) - h(x)\right) \cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$