Тема: Показательные неравенства

Профиль

Сведение к квадратным неравенствам

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $3^{8x}-4\cdot 3^{4x}<-3$

№2. $2^{-x}\cdot\left(0,5^{x}+2^{x+3}-6\right)<0$

№3. $2^{2x+3}+2<2^{x+4}+2^{x}$

№4. $2^{1+x^{2}}+2^{1-3x^{2}}<5\cdot 2^{-x^{2}}$

№5. $6^{\sqrt{x-2}}-2<\dfrac{24}{6^{\sqrt{x-2}}}$

№6. $9^{\sqrt{x^{2}-1}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^{2}-1}-1}$

№7. $2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8\le 2^{\frac{2x}{x+1}}$

№8. $\left(9\cdot 5^{x^{2}}\right)^{\frac{1}{x}}-50\left(5\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right)^{x-2}\ge 5^{x}$

№9. $\left(4^{x}-2^{x+2}\right)^{2}-28\left(4^{x}-2^{x+2}\right)-128\ge 0$

№10. $27\cdot 45^{x}-27^{x+1}-12\cdot 15^{x}+12\cdot 9^{x}+5^{x}-3^{x}\le 0$

№11. $25^{\frac{1}{x}-1}-3\cdot 5^{\frac{1}{x}-1}+2\ge 0$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $11^{\sqrt{x}} - 10 < \frac{11}{11^{\sqrt{x}}}$

№2. $5^{4x-1} + 1 < 6\cdot 5^{2x-1}$

№3. $3^{1+3x^2} + 3^{1-x^2} \le 10\cdot 3^{x^2}$

№4. $2^{\sqrt{x-1,5}} + 2^{3-\sqrt{x-1,5}} < 6$

№5. $9^{x+\frac{1}{9}} - 4\cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \ge 0$

№6. $\left(9^x - 2\cdot 3^x\right)^2 - 62\left(9^x - 2\cdot 3^x\right) - 63 \ge 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $0,1^{x+1}\cdot\left(0,1^x + 0,1^{-x-1} - 11\right) < 0$

№2. $4^x + 85 < 11\cdot 2^{x+1}$

№3. $3^{2x^2+1} + 3^{4x} < 4\cdot 3^{x^2+2x}$

№4. $16^{\sqrt{x^2-2}} + 4 > 65\cdot 4^{\sqrt{x^2-2}-1}$

№5. $81^{\frac{3}{4}-x} - 730\cdot 9^{-x} + 27 \le 0$

№6. $9^{4x-x^2-1} - 36\cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \ge 0$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $5^x\left(5^x + 5^{4-x} - 130\right) < 0$

№2. $2\cdot 3^x - 4\cdot 3^{1-x} < 5$

№3. $3^{-\sqrt{x}}\left(3^{1-\sqrt{x}} + 6\right) + 8\cdot 9^{-\sqrt{x}+0,5} \ge 1$

№4. $\left(7\cdot 6^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} - 6\left(6\cdot 7^{\frac{1}{x}}\right)^{x-1} \ge 6^{x+1}$

№5. $25^{2-3x} - 7\cdot 5^{2-3x} + 6 \le 0$

№6. $4^{x-\frac{1}{2}} - 17\cdot 2^{x-2} + 2 \le 0$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1. $2\cdot 16^{-x} - 17\cdot 4^{-x} + 8 \le 0$

№2. $6^x\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-x} + 6^{2-x} - 37\right) \le 0$

№3. $9^{\frac{3}{2}-x} - 244\cdot 3^{-x} + 9 \le 0$

№4. $4^{2x-3} - 4\cdot 2^{2x-1} + 48 \le 0$

№5. $5^{x+1} + 3\cdot 5^{-x} \le 16$

№6. $\left(4^x - 5\cdot 2^x\right)^2 - 20\left(4^x - 5\cdot 2^x\right) \le 96$

Вариант 5

Решите неравенства:

№1.	$9^x-10\cdot 3^{x+1}+81\ge 0$	№2.	$(0,2)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(5^{1-\frac{2}{x}}+24\right)\ge 5$
№3.	$2^x+3\cdot 2^{-x}\le 4$	№4.	$4^{x-3}-71\cdot 2^{x-6}+7\le 0$
№5.	$\left(25^x-4\cdot 5^x\right)^2+8\cdot 5^x<2\cdot 25^x+15$	№6.	$0,5^{2x+5}-2\cdot 0,5^{x+3}-64\cdot 0,5^{x+2}+128\le 0$
№7.	$9^{\frac{1}{x}-1}-3\cdot 3^{\frac{1}{x}-1}+2\ge 0$		

- ***Ответы (тест)*** Сведение к квадратным неравенствам

	Вар.1	Вар.2	Вар.3	Вар.4	Вар.5
№1	$[0;1)$	$(-1;0)$	$(1;3)$	$[-1,5;0,5]$	$(-\infty;1];[3;\infty)$
№2	$(0;0,5)$	$(\log_2 5;\log_2 17)$	$(-\infty;\log_3 4)$	$[0;2]$	$(-\infty;0)$; $[2;\infty)$
№3	$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$(0;1)$; $(1;2)$	$[0;4]$	$[-2;3]$	$[0;\log_2 3]$
№4	$(2,5;5,5)$	$\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)$; $\left(\sqrt{6};\infty\right)$	$(0;1]$	$\left[\frac{5}{2};\frac{5}{2}+\frac{\log_2 3}{2}\right]$	$[\log_2 7;6]$
№5	$\left(-\infty;\frac{8}{9}\right]$; $\left[\frac{17}{9};\infty\right)$	$[-1,5;1,5]$	$\left[\frac{2-\log_5 6}{3};\frac{2}{3}\right]$	$[-1;\log_5 3]$	$(-\infty;0)$; $(\log_5 3;1)$
№6	$0;[2;\infty)$	$(-\infty;1]$; 2; $[3;\infty)$	$[-1;3]$	$(-\infty;0];[2;3]$	$[-9;-3]$
№7					$(-\infty;0)$; $(0;\log_6 3]$; $[1;\infty)$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a>1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0<a<1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a,b>0,\ a\neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b=a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a>1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x)-g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0<a<1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x)-f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x)\lg f(x) \vee h(x)\lg f(x)$$
$$\left(g(x)-h(x)\right)\cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0=1$	$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}=\dfrac{a^n}{b^n}$