- 11 класс/Показательные неравенства
- ЕГЭ Профиль/ *Задание №15*

Методы решения показательных неравенств

1. Сведение к одному основанию

2. Группировка, разложение на множители

3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

1. Сведение к одному основанию

- ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $2^{-x} < \sqrt{2}$

№2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

№3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

№4. $3\cdot 5^{x+1} + 6\cdot 5^{-(x+1)} < \frac{81}{5^{x+1}}$

№5. $162\cdot 3^{5-x} - 2\cdot 3^{x-5} > 0$

№6. $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$

№7. $7^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-8x+16}} \le 1$

№8. $0,2^{-\frac{2x+3}{x-5}}\cdot 15^{2x}\cdot 25x^{-2} \ge \frac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}}\cdot 9^{x}}{5x^{2}}$

№9. $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \ge \frac{2}{3}\cdot 3,5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$

№10. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}} \le \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$

Тест 1. Сведение к одному основанию

Вариант 1

Решите неравенства:

№1.	$4^{-\frac{x}{2}} < 8$	№2.	$0{,}8^{\frac{x(x-3)}{2}} > 0{,}64$
№3.	$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	№4.	$2^{10x^2-x-1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{10x^2}$
№5.	$4\cdot 3^{x+4} + 19\cdot 3^{-(x+4)} < \frac{31}{3^{x+4}}$	№6.	$\sqrt[6]{64^{3x-1}} > \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$
№7.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \ge \frac{2}{3}\cdot 2{,}5^{x-\frac{3}{x+1}}$	№8.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{10x-12}{x+3}} \le \frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^{x}}$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1.	$10^{\frac{2x}{7}} > 0{,}1$	№2.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-25x^2+20x+10} < \frac{25}{4}$
№3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x-2}{3-3x}} > \frac{9}{4}$	№4.	$(0{,}4)^{\frac{x+7}{x+3}} > (2{,}5)^{-x-1}$
№5.	$2\cdot 3^{x} + \frac{7}{3^{x}} < 61\cdot 3^{-x}$	№6.	$5^{\frac{x^2-7\lvert x\rvert+10}{x^2-6x+9}} \le 1$
№7.	$0{,}25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^{x}\cdot x^{-2} \le \frac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^{x}}{8x^2}$	№8.	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\frac{6-x}{x}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-x}$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1.	$4^{\frac{3x}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	№2.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$
№3.	$\sqrt{3}\cdot 4^{x} \le \sqrt{2}\cdot 9^{x}$	№4.	$27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x^2+6x} < 8$
№5.	$54\cdot 3^{3-x} - 2\cdot 3^{x-3} > 0$	№6.	$0{,}25^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 14^{x}\cdot x^{-2} \le \frac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 112^{x}}{4x^2}$
№7.	$\sqrt{625^{\frac{4-2x}{x-1}}} > \sqrt[3]{125^{2x+1}}$	№8.	$4\left(\sqrt{5}+1\right)^{\frac{6x-3}{x-2}} \ge \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2x+1}}{16^{x}}$

Вариант 4

Решите неравенства:

№1.	$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{5}} > 3$	№2.	$0,2^{\frac{3x-3}{x-2}} > \frac{1}{5}$
№3.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^3+5}{x+5}} < 0,5$	№4.	$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} < \frac{2}{3}$
№5.	$7 \cdot 2^{x+4} - 448 \cdot 2^{-x-4} < 0$	№6.	$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$

- ***Ответы (тест)*** 1. Сведение к одному основанию

	Вар.1	Вар.2	Вар.3	Вар.4
№1	$x > -3$	$x > -3,5$	$x < -\frac{5}{9}$	$x < -2,5$
№2	$-1 < x < 4$	$-0,4 < x < 1,2$	$0 < x < 0,5$	$0,5 < x < 2$
№3	$1 < x < 4$	$0,8 < x < 1$	$x \ge \frac{1}{4}$	$(-\infty;-5)\cup(-1;0)\cup(1;\infty)$
№4	$-\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{4}$	$(-4;-3)\cup(1;\infty)$	$-1 < x < 7$	$x < 2$
№5	$x < -3,5$	$x < 1,5$	$x < 4,5$	$x < -1$
№6	$\left(\frac{1}{3};1\right)\cup(3;\infty)$	$[-5;-2]\cup[2;3)\cup(3;5]$	$(-2;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right]\cup[1;\infty)$	$(-1;2]\cup[3;\infty)$
№7	$(-\infty;-2]\cup(-1;2]$	$(-\infty;-4];[-3;0);(0;2)$	$(-\infty;-3);\left(1;\frac{3}{2}\right)$	
№8	$(-3;3]\cup[4;\infty)$	$(-\infty;-3]\cup(0;2]$	$[-2,5;1]\cup(2;\infty)$	

2. Группировка, разложение на множители

▪ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $2^{2x}+2^{2x-1}>\sqrt{3}\cdot 3^{x}+3^{x-0,5}$

№2. $-3\cdot 2^{x+3}+2^{x+4}-2^{x+5}>5^{x+2}-5^{x+3}$

№3. $x^{2}\cdot 4^{x}+36>4x^{2}+9\cdot 4^{x}$

№4. $48^{x}-\sqrt{6}\cdot 2^{3x}-\sqrt{8}\cdot 6^{x}+\sqrt{48}\leq 0$

№5. $5^{(x+1)^{2}}+625\leq 5^{x^{2}+2}+5^{2x+3}$

№6. $4^{x-3}-2^{x-3}\left(16-x^{2}\right)-16x^{2}\geq 0$

№7. $3^{x+3}+3^{x+2}-3^{x}<2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}-1}+2^{\frac{x}{2}-2}$

№8. $12^{x}-729\cdot 4^{x}+364,5<\dfrac{3^{x}}{2}$

№9. $4^{\frac{2x+2}{x}}-\dfrac{4}{3}\cdot 12^{\frac{x+1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\geq 0$

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $2\cdot 3^{x+1}-9\cdot 2^{x+1}>9\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}$	№2. $15^{x}-9\cdot 5^{x}-3^{x}+9\le 0$
№3. $x^{2}\cdot 3^{x}+4>x^{2}+4\cdot 3^{x}$	№4. $9^{x-4}-3^{x-4}\left(9-x^{2}\right)-9x^{2}\ge 0$
№5. $3^{(x+2)^{2}}+1\ge 3^{x^{2}-1}+3\cdot 81^{x+1}$	№6. $5^{x+2}-5^{x+1}-15\cdot 5^{x}<3^{\frac{x}{2}+1}-3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{x}{2}-1}$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $2^{2x}-15\cdot 11^{x}<11^{x}-15\cdot 2^{2x+3}$	№2. $10\cdot 3^{x+2}-4\cdot 10^{x+2}<3^{x+4}-3\cdot 10^{x+2}$
№3. $5+2\cdot 10^{x}-10\cdot 2^{x}-5^{x}\ge 0$	№4. $3^{\frac{x+2}{x}}+3^{\frac{1}{x}+2}-3^{\frac{1}{x}}\ge 3$
№5. $3^{x+3}-x^{3}\cdot 3^{x}\le 81-3x^{3}$	№6. $7^{x+2}-7^{x+1}-2\cdot 7^{x}>2^{\frac{x}{3}+1}+2^{\frac{x}{3}-1}$

Вариант 3

Решите неравенства:

№1. $6\cdot 5^{x}-6^{x}<4\cdot 6^{x+1}-6\cdot 5^{x+1}$	№2. $-4\cdot 3^{x}+3^{x+1}-3^{x+2}<10^{x-1}-10^{x}$
№3. $4^{x+3}-x^{3}\cdot 4^{x}\le 256-4x^{3}$	№4. $5^{2x+4}-25\cdot 5^{x+4}-5^{x}+25\le 0$
№5. $250^{x}-5\cdot 2^{x}+1{,}25<\dfrac{5^{3x}}{4}$	№6. $5^{x+3}-5^{x+2}-5^{x}<6^{\frac{x}{2}+3}-6^{\frac{x}{2}+2}+3\cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$

▪ ***Ответы (тест)*** 2. Группировка, разложение на множители

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$x>3$	$[0;2]$	$(-2;0);(2;\infty)$	$[6;\infty)$	$\left[-\frac{5}{4};-1\right];[1;\infty)$	$x<-\frac{\lg 3}{\lg 5-\lg\sqrt{3}}$
Вар.2	$x>2$	$(-2;\infty)$	$(-\infty;-1];[1;\infty)$	$(-\infty;-1];(0;\infty)$	$(-\infty;1]\cup[3;\infty)$	$x>-\frac{\lg 16}{\lg 7-\lg\sqrt[3]{2}}$
Вар.3	$x>2$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;1];[4;\infty)$	$[-4;2]$	$\left(-2;\frac{1}{3}\right)$	$x<\log_{\frac{25}{6}}4$

3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

▪ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1} > 6^{\sqrt{x}-1}$

№2. $x^2 \cdot 27^{\sqrt{x}} \le 3^{3\left(\sqrt{x}+\frac{2}{3}\right)}$

№3. $2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 < x^2 + 8 \cdot 2^{\sqrt{x}}$

№4. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

№5. $\frac{10^x - 2 \cdot 5^x - 25 \cdot 2^x + 50}{\sqrt{x+3}} \ge 0$

Тест 3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $0,3^{3\sqrt{4-x}} \ge 0,3^{5-2\sqrt{4-x}}$

№2. $\dfrac{3^{\sqrt{x}+1}}{x} > 3^{\sqrt{x}-1}$

№3. $0,125^{\sqrt{x}} \ge \dfrac{x^2}{8^{\sqrt{x}}}$

№4. $5^{\sqrt{x}} + (0,2)^{-\sqrt{x}-2} - 5^{2\sqrt{x}+1} \ge 5$

№5. $\dfrac{2\cdot 14^x - 14\cdot 2^x - 7^x + 7}{\sqrt{x+5}} \ge 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} > 2^{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{8}$

№2. $\dfrac{10^{\sqrt{x-1}+2}}{x+1} > 10^{\sqrt{x-1}+1}$

№3. $\dfrac{x^2}{4^{\sqrt{x}}} \le 2^{2\left(2-\sqrt{x}\right)}$

№4. $\dfrac{x^2 - x}{2^{\sqrt{x}}} < 0,5^{\sqrt{x}-1}$

№5. $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} \le 11$

Ответы (тест) 3. Неравенства, содержащие иррациональное выражение

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$3 \le x \le 4$	$x \in (0;9)$	$0 \le x \le 1$	$x \in [0;1]$	$(-5;-1];[1;\infty)$
Вар.2	$x \in [1;2)$	$1 \le x < 9$	$0 \le x \le 4$	$0 \le x < 2$	$0 \le x \le 1$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a>1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0<a<1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a,b>0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b=a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a>1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x)-g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0<a<1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x)-f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x)\lg f(x) \vee h(x)\lg f(x)$$
$$\left(g(x)-h(x)\right)\cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0=1$	$a^{-1}=\frac{1}{a}$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$