

- Тематические курсы/Уравнения/Тригонометрические /Основные приемы решения
- ЕГЭ Профиль/*Задание №13*/ Тригонометрические уравнения
- Алгебра 10 / Тригонометрические уравнения/Основные приемы решения

Основные приемы решения тригонометрических уравнений

1. Основные приемы решения
2. Методы решения
3. Двойной угол Часть 1
4. Двойной угол Часть 2

1. Основные приемы решения

Примеры

1. Решите уравнение $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

2. а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -4 - 3\operatorname{tg} x$.

4. Решите уравнение $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$.

5. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.

6. а) Решите уравнение $2\sin^2 \frac{\pi}{x} - \cos \frac{\pi}{x} - 1 = 0$;
б) Указать наибольшее решение на интервале $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

7. Решите уравнение $2\cos^2 \frac{\pi x}{3} - \cos \frac{\pi x}{3} = 0$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

■ Тест 1. Основные приемы решения

Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

2. а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$.

4. а) Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.

5. Решите уравнение $2\cos^2 \frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\sin \frac{x}{2} - 4 = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

3. Решите уравнение $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0$.

4. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$.

5. а) Решите уравнение $2\cos^2 \frac{\pi}{x} - \sin \frac{\pi}{x} - 1 = 0$;
б) Указать наибольшее решение на интервале $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

▪ **Ответы (тест)** 1. Основные приемы решения

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4} + \pi k$	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ б) $-\frac{23\pi}{6}; -\frac{19\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2} + 4\pi k;$ $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k$
Вар.2	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$	$\frac{\pi}{4} + \pi k$	$\frac{\pi}{12} + \pi k;$ $\frac{5\pi}{12} + \pi k$	а) $2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $4\pi; \frac{13\pi}{3}$	а) $\frac{2}{4k-1}; \frac{6}{12n+1}; \frac{6}{12n+5}$ б) 1,2

2. Методы решения

▪ Примеры

1. а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

2. а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + (2 - \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} - 2 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

▪ Тест 2. Методы решения

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x - \cos x = 0$;
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
-

2. а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.
-

3. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.
-

4. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 10\sin x - 5\sqrt{2} = 0$;
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.
-

5. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - (2 - \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} - 2 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\frac{3}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \sin^2 x + \frac{1}{2}$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = 2$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

3. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

4. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x + \sqrt{3} - 2 = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

5. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

▪ **Ответы (тест) 2. Методы решения**

	Вариант 1	Вариант 2
№1	а) $2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m$ б) $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}$	а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ б) $-\frac{5\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{6}$
№2	а) $2\pi k$ б) -2π	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ б) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$
№3	а) $2\pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}$	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $\frac{7\pi}{3}$
№4	а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ б) $\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$	а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$
№5	а) $\pi + 2\pi k, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ б) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$	а) $2\pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ б) $\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$

3. Двойной угол Часть 1

▪ Примеры

1.
 - а) Решите уравнение $2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0$;
 - б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

2.
 - а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$;
 - б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

3.
 - а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$;
 - б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.
 - а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 3\cos 2x - 1 = 0$;
 - б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right)$.

■ Тест 3. Двойной угол Часть 1

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $3\sin 2x - 3\cos x + 2\sin x - 1 = 0$;
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
-

2. а) Решите уравнение $\cos 2x - 13\cos x + 7 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-8; -6]$.
-

3. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.
-

4. а) Решите уравнение $(1 - \cos 2x)\sin 2x = \sqrt{3}\sin^2 x$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{3}]$.
-

5. а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $2\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 3 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.
-

2. а) Решите уравнение $\cos 2x + 9\sin x - 5 = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[7; 9]$.
-

3. а) Решите уравнение $4\cos^4 x - \cos 2x - 1 = 0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $(-3\pi; -\frac{3\pi}{2})$.
-

4. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin x = 1 + \cos x$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-4; -3]$.

Вариант 3.

1. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
-
2. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
-
3. а) Решите уравнение $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.
-
4. а) Решите уравнение $\cos 2x + 0,5\sin 2x + \sin^2 x = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.
-
5. а) Решите уравнение $\cos 2x + 0,5\sin 2x - \cos^2 x = 0$;
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3,5\pi; 4,5\pi]$.

▪ **Ответы (тест)** 3. Двойной угол Часть 1

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1.	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$ $\pi \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k$ б) $-\frac{11\pi}{6}, -\pi - \arccos \frac{1}{3},$ $-\frac{7\pi}{6}$	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$ б) $\frac{5\pi}{2}, \pi + \arccos \frac{3}{4}$	а) $\pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $-2\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\pi$
2.	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $-\frac{7\pi}{3}$	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ б) $\frac{17\pi}{6}$	а) $\pi k, \frac{\pi}{3} + \pi n$ б) $2\pi, \frac{9\pi}{4}, 3\pi$
3.	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$	а) $2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ б) $-4\pi, -\frac{11\pi}{3}$
4.	а) $\pi k, \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n$ б) $-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, 0,$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$	а) $\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ б) $-\pi, -\frac{7\pi}{6}$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{4}$
5.	а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ б) $-\frac{11\pi}{4}$		а) $\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $4\pi, \frac{17\pi}{4}$

4. Двойной угол Часть 2

▪ Примеры

1. а) Решите уравнение $2 \cos x \cdot \sin 2x = 2 \sin x + \cos 2x$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
-

2. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
-

3. а) Решите уравнение $7 \cos x - 4 \cos^2 x = 2\sqrt{3} \sin 2x$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.
-

4. а) Решите уравнение $\sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$;
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right)$.
-

5. а) Решите уравнение $8 \sin x \cdot \cos^3 x - 2 \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$;
 б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\right]$.

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $2 \sin x \cdot \sin 2x = 2 \cos x + \cos 2x$;
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.
-
2. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
-
3. а) Решите уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3} \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
-
4. а) Решите уравнение $4 \sin x \cdot \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\sin x - 1)$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
-
5. а) Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 2x + \sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x - \sqrt{3} \cos^2 x + \sin x = 0$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.
-
2. а) Решите уравнение $5 \sin x - 4 \sin^3 x = 2 \sin 2x$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
-
3. а) Решите уравнение $\sin 2x = 2 \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;
 б) Укажите корни, принадлежащие интервалу $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.
-
4. а) Решите уравнение $4 \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} = \cos x (\sqrt{3} - 4 \sin x)$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.
-
5. а) Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$;
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Вариант 3

1. а) Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 2x - \sin^2 x - \cos x = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

2. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

3. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

4. а) Решите уравнение $4\sin x \cdot \cos^2 x - 1 = \cos x(4\sin x - 1)$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

5. а) Решите уравнение $2\sin 2x + 2\sin(-x) - 2\cos(-x) + 1 = 0$;

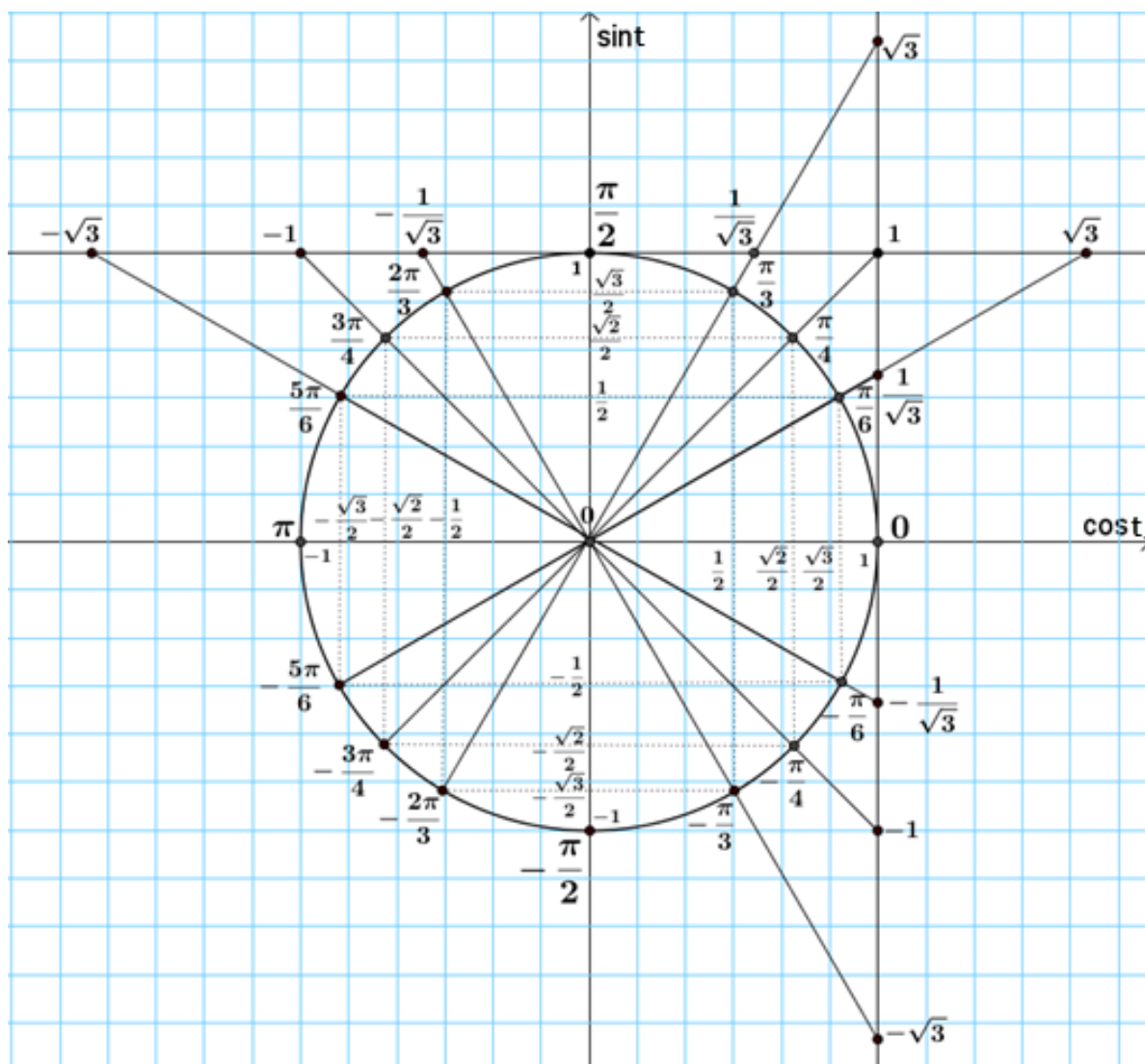
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

■ Ответы (тест)

4. Двойной угол Часть 2

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1.	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}$	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pi n$ б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\pi$
2.	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$	а) $\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ б) $-3\pi; -\frac{7\pi}{3}; -2\pi$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}$
3.	а) $\pi k, \frac{\pi}{6} + \pi n$ б) $-\frac{17\pi}{6}, -2\pi, -\frac{11\pi}{6}$	а) $\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z}$ б) $-2\pi, -\frac{7\pi}{4}$	а) $\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ б) $\frac{7\pi}{4}, 2\pi, 3\pi$
4.	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ б) $\frac{11\pi}{3}, \frac{15\pi}{4}, \frac{13\pi}{3}$	а) $\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n$ б) $3\pi, \frac{19\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}$	а) $-\frac{\pi}{12} + \pi n, -\frac{5\pi}{12} + \pi n, 2\pi k$ б) $-\frac{29\pi}{12}, -\frac{25\pi}{12}, -2\pi$
5.	а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ б) $-4\pi, -\frac{23\pi}{6}, -3\pi$	а) $\frac{\pi k}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$ б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{17\pi}{6}, \frac{11\pi}{3}$

✓ Тригонометрический круг



✓ Основные тригонометрические формулы

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
3. $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
5. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$
6. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
7. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
8. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
9. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
10. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
11. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
12. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
13. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
14. $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$
15. $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
16. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
17. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
18. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
19. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
20. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
21. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$
22. $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
23. $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
24. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
25. $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
26. $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
27. $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
28. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
29. $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
30. $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$