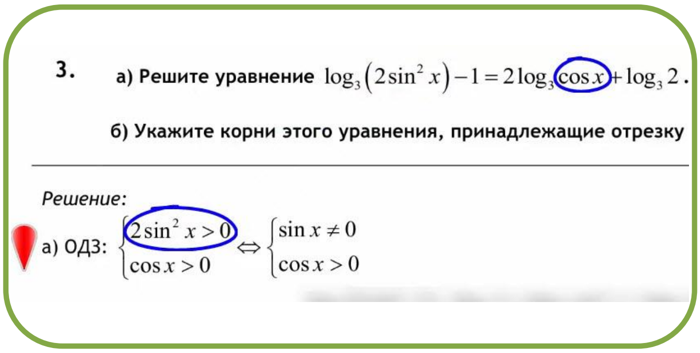
Тема: Комбинированные уравнения

Профиль



3. а) Решите уравнение $\log_3\left(2\sin^2 x\right)-1=2\log_3 \cos x+\log_3 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

Решение:

а) ОДЗ: $\begin{cases} 2\sin^2 x>0 \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x>0 \end{cases}$

- Тематические курсы/Уравнения/Комбинированные/ Логарифмические и тригонометрические
- Алгебра 11 / Логарифмические уравнения/ Логарифмические и тригонометрические
- ЕГЭ Профиль/ ***Задание №13/*** Комбинированные уравнения

Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим

1. В основании логарифма содержится выражение, не зависящее от переменной

2. В основании логарифма содержится выражение, зависящее от переменной

3. Уравнения, содержащие тригонометрическое, логарифмическое и иррациональное выражения

4. Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 13 ЕГЭ Профиль

1. В основании логарифма содержится выражение, не зависящее от переменной

- ***Примеры***

1. а) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

---

2. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + \log_2\left(\sqrt{3}\cos x\right) = -1$.

---

3. а) Решите уравнение $\log_3\left(2\sin^2 x\right) - 1 = 2\log_3 \cos x + \log_3 2$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

---

4. Решите уравнение $\dfrac{\left(tgx + \sqrt{3}\right)\log_{13}\left(2\sin^2 x\right)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0$.

---

5. Решите уравнение $1 + \sin^2(3\pi x) \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(5x - x^2 - 6\right) = \cos(6\pi x)$.

---

6. Решите уравнение $\log_3(|2\sin x| - |\cos x|) + \log_3|\cos x| + \log_3 2 = 0$.

▪ *Тест* 1. В основании логарифма число

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\log_7\left(2\cos^2 x+3\cos x-1\right)=0$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

---

2. а) Решите уравнение $4\log_2^2\left(\sin x\right)-3\log_{0,5}\left(\sin^2 x\right)+2=0$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

---

3. а) Решите уравнение $2\log_2 \sin x+1=\log_2\left(\sin x+1\right)$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;5\pi\right]$.

---

4. Решите уравнение $\left(2\sin^2 x+11\sin x+5\right)\cdot\log_{15}\left(-\cos x\right)=0$.

---

5. Решите уравнение $\left(10\cos^2 x-7\cos x-6\right)\cdot\log_8\left(-\sin x\right)=0$.

---

6. Решите уравнение $\dfrac{\sin x\cdot\left(2\sin x+1\right)\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)}{\lg\left(tgx\right)}=0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\log_3\left(3\sin x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\cos x\right)=1$.

---

2. а) Решите уравнение $\log_4^2\left(\cos 2x\right)=\log_{\frac{1}{16}}\left(\cos 2x\right)$.

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

---

3. а) Решите уравнение $2\log_2 \cos x+1=\log_2\left(1-\cos x\right)$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;3\pi\right]$.

---

4. Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+11\cos x+5\right)\cdot\log_{18}\left(\sin x\right)=0$.

---

5. Решите уравнение $\left(\sqrt{3}\sin x-2\sin^2 x\right)\log_6\left(-tgx\right)=0$.

---

6. Решите уравнение $\dfrac{4\sin^2 x-3}{\ln\left(1+tgx\right)}=0$.

▪ *Ответы (тест)* 1. В основании логарифма число

	Вариант 1	Вариант 2
1.	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $-\frac{7\pi}{3}$.	$\frac{\pi}{4}+2\pi n$
2.	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n$ *б)* $-\frac{19\pi}{6},\ -\frac{13\pi}{4}$	*а)* $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ *б)* $3\pi,\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\ 4\pi,\ \frac{25\pi}{6}$
3.	*а)* $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; *б)* $\frac{9\pi}{2}$.	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; *б)* $\frac{7\pi}{3}$.
4.	$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi+2\pi n$	$\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n$
5.	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi m$
6.	$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$	$\frac{\pi}{3}+\pi n$

2. В основании логарифма содержится выражение, зависящее от переменной

▪ ***Примеры***

1. Решите уравнение $\log_{\cos x}\dfrac{4(1-\sin x)}{3}=2$.

2. а) Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sin 2x+3\cos^2 x+\sin^2 x\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\pi\right]$.

3. Решите уравнение $\log_{tg\frac{\pi x}{3}}\left(2\sqrt{2}\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)+\left(\sqrt{2}-2\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)\right)=0$.

4. Решите уравнение $\log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(1-\sin 2x-2\sin x)=\log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(-\cos x)$.

5. Решите уравнение $2|\sin 3x|=-\sqrt{3}\log_{tg3x}\dfrac{-2|\cos 3x|\sin 3x}{1-\cos 6x}$.

Вариант 1

1. Решите уравнение $\log_{\sin x}\dfrac{5(1-\cos x)}{4}=2$.

---

2. Решите уравнение $\log_{(-3\sin x)}(\cos 2x-3\cos x)=0$.

---

3. Решите уравнение $2\sin^2 x+3\sin 2x=\log_{\cos x}(\cos^2 x+\sin^2 x)$.

---

4. а) Решите уравнение $\log_{\sin 2x}(tgx+ctgx)=1-\log^2_{\sin 2x}2$.
   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

---

5. а) Решите уравнение $\log_{(-tgx)}\left(tg^2x+\sqrt{3}\cdot ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\sqrt{3}\right)=1$.
   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

6. Решите уравнение $\log_{\frac{7-|2x-3|}{4-\pi}}(\sin 2x+2\cos x+1)=\log_{\frac{7-|2x-3|}{4-\pi}}(-\sin x)$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\log_{(-2\cos x)}(3\sin x-\cos 2x)=0$.

---

2. Решите уравнение $\log_{ctgx}(\sin 2x+ctgx\cdot\sin x+1)=0$.

---

3. Решите уравнение $\log_{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)+1\right)=0$.

---

4. а) Решите уравнение $\log_{(-\cos x)}\left(3+3\cdot\sin x-\cos^2(\pi-x)\right)=2$;
   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

5. Решите уравнение $2|\sin x|=-\sqrt{3}\log_{tgx}\dfrac{-2|\cos x|\sin x}{1-\cos 2x}$.

▪ *Ответы (тест)* 2. В основании логарифма выражение с переменной

	Вариант 1	Вариант 2
1.	$\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$	$\frac{5\pi}{6}+2\pi k$
2.	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$
3.	$-arctg3+2\pi k$	$-\frac{1}{2}+6n$
4.	*а)* $\frac{\pi}{8}+\pi k,\ \frac{3\pi}{8}+\pi k$; *б)* $\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}$.	*а)* $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; *б)* $-\frac{5\pi}{6}$.
5.	*а)* $-\frac{\pi}{3}+\pi k$; *б)* $-\frac{4\pi}{3}$.	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
6.	$\frac{3\pi}{2};\frac{4\pi}{3}$	

3. Уравнения, содержащие тригонометрическое, логарифмическое и иррациональное выражение

Примеры

1. Решите уравнение $\dfrac{\left(2\cos^2 x-3\cos x+1\right)\sqrt{1-2\sin x}}{\log_{2015}\left(-tgx\right)}=0$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\log_{1/3}\left(x-2\right)+2}\cdot\left(\cos 2x-3\cos x-1\right)=0$.

3. а) Решите уравнение $\sqrt{2\cos x+1}\cdot\log_2\left(2\sin x\right)=0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right]$.

Тест 3. Уравнения, содержащие тригонометрическое, логарифмическое и иррациональное выражения

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{\left(3\sin^2 x-2\sin x\right)\sqrt{\cos x+\dfrac{1}{2}}}{\log_{\cos x}\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)}=0$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\log_{1/2}\left(x-3\right)+1}\cdot\left(\cos 2x+7\cos x+4\right)=0$.

3. а) Решите уравнение $\sqrt{2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+1}\cdot\log_3\left(2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=0$;
б) Укажите корни этого уравнения из отрезка $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{\log_5(-2\cos x)}{\sqrt{5tgx}}=0$.

---

2. Решите уравнение $\sqrt{\log_2\left(x^2-x-5\right)}+\sqrt{\log_{1/3}\cos\pi x}=0$.

---

3. Решите уравнение $\sqrt{2\sin x-1}\cdot\log_7\left(-2\cos x\right)=0$.

■ ***Ответы (тест)*** 3. Уравнения, содержащие тригонометрическое, логарифмическое и иррациональное выражения

	Вариант 1	Вариант 2
1.	$\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k$	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
2.	$\frac{4\pi}{3}$, 5	-2
3.	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $-\frac{13\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{3}$.	$\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$

4. Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 13 ЕГЭ Профиль

- ***Примеры***

№1. а) Решите уравнение $\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\log_9\left(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2\right) = x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\log_3^2\left(2\cos x\right) - 5\log_3\left(2\cos x\right) + 2 = 0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\dfrac{3\cos^2 x - \sin^2 x - 2}{\log_4(-\cos x)} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№6. а) Решите уравнение $\log_2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) + \log_2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = -1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№7. а) Решите уравнение $5^{2\left(\log_2(\sin x)\right)^2} = \dfrac{5}{5^{\log_2(\sin x)}}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

▪ *Тест* Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 13 ЕГЭ Профиль

№1. а) Решите уравнение $\log_8\left(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

№2. а) Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-6\sin^2 x\right)=x$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

№3. а) Решите уравнение $2\log_3^2\left(2\sin x\right)-7\log_3\left(2\sin x\right)+3=0$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2\left(\cos x\right)+\log_2\left(\cos x\right)}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

№5. а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4\left(\sin x\right)}=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

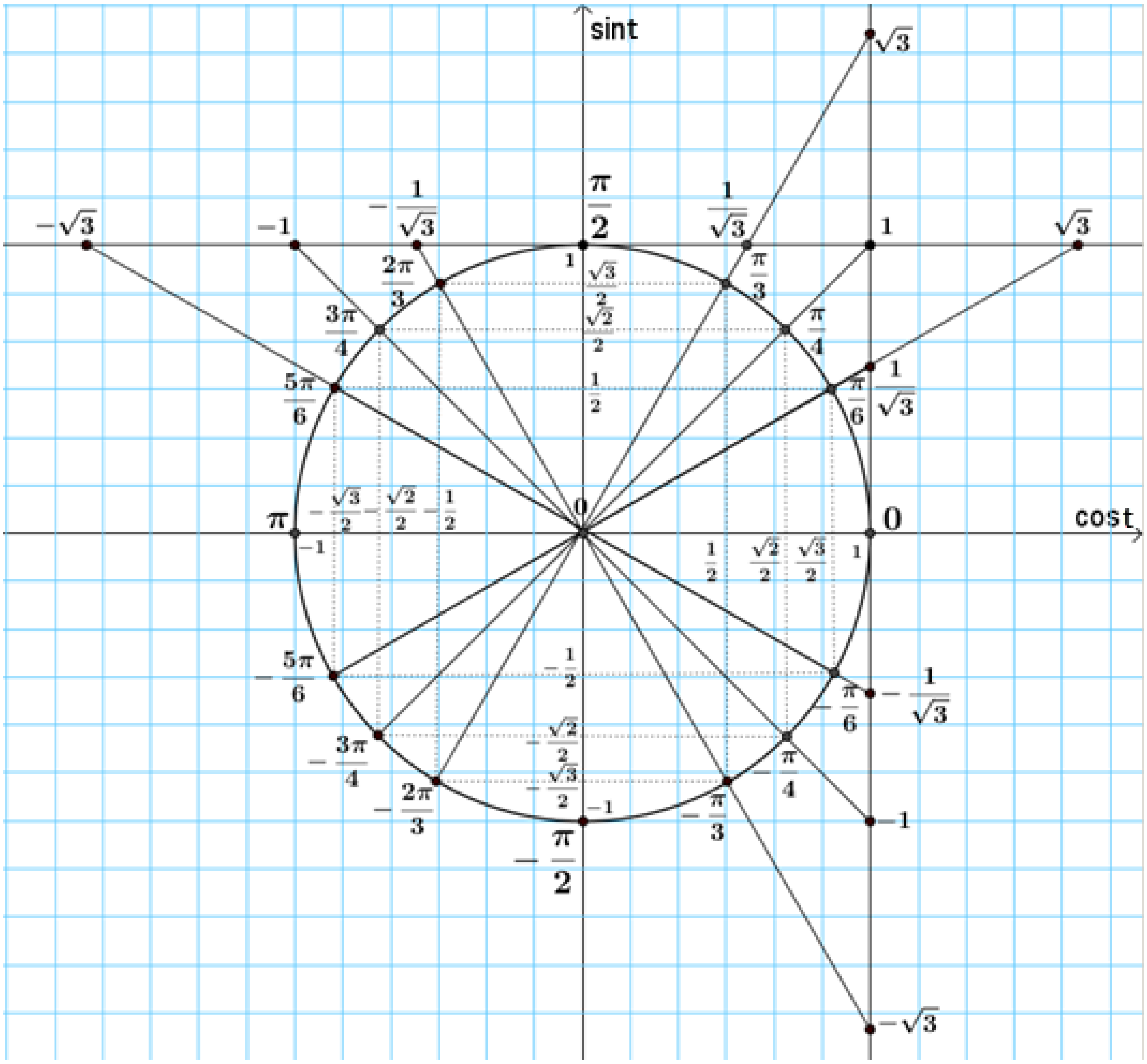
№6. а) Решите уравнение $\log_2\left(\cos x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\log_2\left(\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-3$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

▪ *Ответы (тест)* Логарифмические уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. Задание 13 ЕГЭ Профиль

№1	№2	№3	№4	№5	№6
а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ *б)* $\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$	*а)* $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ *б)* $\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}$	*а)* $\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ *б)* $\frac{2\pi}{3}$	*а)* $2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$ *б)* $0,\ \frac{\pi}{3}$	*а)* $\frac{\pi}{6}+2\pi m$ *б)* $-\frac{11\pi}{6}$	*а)* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ *б)* $\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}$

✓ *Тригонометрический круг*



✓ Основные тригонометрические формулы

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ **2.** $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ **3.** $ctg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ **4.** $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

5. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$ **6.** $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$

7. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ **8.** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

9. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ **10.** $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

11. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ **12.** $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

13. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

14. $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$ **15.** $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$

16. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$ **17.** $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$

18. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **19.** $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

20. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ **21.** $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

22. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$ **23.** $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

24. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$

25. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ **26.** $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ **27.** $\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

28. $\sin2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ **29.** $\cos2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

30. $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\ \sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

✓ Уравнение вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ называют *логарифмическим*, где $a>0,\ a\neq 1$ и $f(x)>0,\ g(x)>0$

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \text{ и } a>0,\ a\neq 1$$

✓ *Свойства логарифмов*

1. $a^c=b \Leftrightarrow c=\log_a b \quad (b>0, a>0, a\neq 1)$

2. $a^{\log_a b}=b,\quad b>0$

3. $\log_a a=1$

4. $\log_a 1=0$

5. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
$(x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

5.1. $\log_a xy=\log_a |x|+\log_a |y|$
$(x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

6. $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
$(x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

6.1. $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a |x|-\log_a |y|$
$(x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

7. $\log_a \left(x^k\right)=k\log_a x$
$(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

7.1. $\log_a \left(x^{2k}\right)=2k\log_a |x|$
$(x\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1)$

8. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$
$a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$

8.1 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ или $\log_c b=\log_c a\cdot\log_a b$
$(a>0, b>0, c>0\ \ a\neq 1, c\neq 1)$

<u>**Определение:**</u> ***Областью определения уравнения*** $f(x)=g(x)$ ***или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения*** $f(x)$ ***и*** $g(x)$.

✓ *Наиболее часто встречающиеся действия, приводящие к расширению области определения уравнения:*

1) Освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;
2) Освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени;
3) Освобождение в процессе решения от знаков логарифма

✓ Ограничений для переменной, входящей в выражение не так много – их всего пять и можно запомнить, разместив на пальцах ладони.