Комбинированные неравенства

▪ ***Примеры*** Решите неравенства:

№1. $\dfrac{6^x-4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x-5\cdot 2^x-4x+20}\le \dfrac{1}{x-5}$

№2. $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x\ge 28x$

№3. $\dfrac{4^{x+1}-192\cdot 0,25^{x+1}-4}{x+2}\le 0$

№4. $\dfrac{10^x-25\cdot 2^x-2\cdot 5^x+50}{5x-x^2-4}\ge 0$

№5. $\dfrac{3^{x^2+x}-4\sqrt{3}^{x^2+x}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}\le 0$

№6. $\dfrac{81^x+2\cdot 25^{x\cdot\log_5 3}-5}{(4x-1)^2}\ge 0$

№7. $\sqrt{x^2+x-6}\cdot\left(5^x+5^{4-x}-130\right)\le 0$

№8. $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\ge 0$

№9. $\sqrt{5^{x-4}-25}\cdot\left(3^{(x-5)^2-23}-3^{x^2-10x}-72\right)<0$

№10. $\dfrac{\sqrt{x+4}\left(8-3^{2+x^2}\right)}{4^{x-1}-3}\le 0$

▪ ***Тест*** Комбинированные неравенства

Вариант 1

Решите неравенства:

№1. $\left(2^{x+2}+2^{3-x}\right)x \ge 33x$

№2. $\dfrac{2^{2x+1}-96\cdot 0{,}5^{2x+3}+2}{x+1} \le 0$

№3. $\dfrac{\sqrt{10-x}}{4^x-3\cdot 2^{x+2}-13} \le 0$

№4. $\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9} \ge 0$

№5. $\sqrt{2-x}\left(7^{\frac{x}{2}+1}+13\cdot 7^{\frac{x}{4}}-2\right) \ge 0$

№6. $\sqrt{27-3^{x+2}}\cdot\left(5^{(x-2)^2-3}-5^{x^2-4x}-100\right) < 0$

№7. $\dfrac{\sqrt{x-2}\left(4-3^{x-1}\right)}{2^{1-x^2}-3} \ge 0$

Вариант 2

Решите неравенства:

№1. $\dfrac{3^{2x}-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3} \le 0$

№2. $\sqrt{8-2x-x^2}\cdot\left(4^x+4^{4-x}-68\right) \ge 0$

№3. $\left(9^x-2\cdot 3^{x+1}+8\right)\sqrt{4-2^{2x}} \ge 0$

№4. $\dfrac{5^x-2\cdot 5^{\frac{x}{2}}-15}{\sqrt{x+4}} < 0$

№5. $\sqrt{49-7^{x-3}}\cdot\left(2^{x^2-6x}-2^{(x-3)^2-6}+28\right) > 0$

№6. $\dfrac{8\cdot 7^x-4^{x\cdot\log_2 7}-11}{(2x-1)^2} \ge 0$

▪ ***Ответы (тест)*** Комбинированные неравенства

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
Вар.1	$[-2;0]$; $[3;\infty)$	$(-1;0{,}5]$	$(-\infty;\log_2 13)$; $\{10\}$	$\{0\}$; $[4;\infty)$	$[-4;2]$	$\left(2-\sqrt{6};1\right)$	$\{2\}$; $[\log_3 12;\infty)$
Вар.2	$(-3;0{,}5]$	$[-4;1]$; $\{2\}$	$(-\infty;\log_3 2]$; $\{1\}$	$(-4;2)$	$\left(3-\sqrt{11};5\right)$	$\left[\log_7\left(4-\sqrt{5}\right);0{,}5\right)$; $\left(0{,}5;\log_7\left(4+\sqrt{5}\right)\right]$	

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, *если* $a > 1$, *функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.*

2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, *если* $0 < a < 1$, *функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.*

3. $a^{f(x)} \vee b$, *где* $a, b > 0,\ a \neq 1$ *неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества* $b = a^{\log_a b}$.

4. *К неравенствам вида* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right) \cdot h \vee 0$ *применим метод замены множителя:*

   пусть $a > 1$, *тогда множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить множителем* $\left(f(x) - g(x)\right)$ *того же знака;*

   если $0 < a < 1$, *то множитель* $\left(a^{f(x)} - a^{g(x)}\right)$ *можно заменить противоположным множителем* $\left(g(x) - f(x)\right)$.

5. *Неравенства вида* $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ *можно логарифмировать по основанию больше 1*

$$\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)}$$
$$g(x) \lg f(x) \vee h(x) \lg f(x)$$
$$\left(g(x) - h(x)\right) \cdot \lg f(x) \vee 0$$

✓ *Свойства степеней*

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$