

Сведение к рациональным неравенствам

■ Примеры

Решите неравенства:

№1. $\frac{3 \cdot 7^{1-x} - 4}{1 - 7^x} \leq \frac{1}{7^{-x} - 1}$

№2. $\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1$

№3. $\frac{2^{x+\log_2 5} - 6}{1 - (0,5)^{x-2}} \geq 2^x$

№4. $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$

№5. $\frac{6}{1 - 2 \cdot 2^x} - \frac{1}{1 - 4 \cdot 2^x} \leq \frac{3}{2^{x+2}}$

№6. $\frac{27^{\frac{x+1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{\frac{x+1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

№7. $\frac{3}{(2^{2-x^2} - 1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geq 0$

№8. $\frac{2^{x+5} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x$

№9. $2 \cdot \frac{125^x - 1}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11$

№10. $\frac{8^x}{18^x - 27^x} + \frac{4(4^x - 6^x)}{4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x} \leq \frac{4^{x+1}}{6^x - 9^x}$

Вариант 1

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{10 \cdot 3^x - 18}{3^x - 3} \geq 3^x + 3$$

$$\text{№2. } \frac{1}{5^x + 31} \leq \frac{4}{5^{x+1} - 1}$$

$$\text{№3. } \frac{5^{x+2} - 3 \cdot 5^{x+1} - 26}{5^x - 1} \geq 5^x + 1$$

$$\text{№4. } \frac{567 - 9^{-x}}{81 - 3^{-x}} \geq 7$$

$$\text{№5. } \frac{6}{2^{x-2} - 2} - \frac{1}{2^{x-2} - 4} \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{№6. } \frac{28}{(2^{7-x^2} - 4)^2} + \frac{1}{2^{7-x^2} - 4} - 2 \geq 0$$

Вариант 2

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{1}{5^{-x} - 1} \geq \frac{2 - 3 \cdot 5^{1-x}}{5^x - 1}$$

$$\text{№2. } \frac{4^{x-0,5} + 1}{9 \cdot 4^x - 16^{x+0,5} - 2} \leq 0,5$$

$$\text{№3. } \frac{8^x - 5 \cdot 2^x}{2^x - 2^{4-x}} \geq 0$$

$$\text{№4. } \frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5$$

$$\text{№5. } \frac{9^{\frac{x+1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 5}{9^{\frac{x+1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leq \frac{2 \cdot 3^{x+2} - 12}{3^{x+1} - 1}$$

$$\text{№6. } \frac{14}{(4^{5-x^2} - 2)^2} + \frac{1}{4^{5-x^2} - 2} - 4 \geq 0$$

Вариант 3

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{9 \cdot 2^x - 24}{2^x - 4} \geq 2^x + 4$$

$$\text{№2. } \frac{25^x - 28}{5^x - 6} \geq 3$$

$$\text{№3. } \frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3$$

$$\text{№4. } \frac{5 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} \geq 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\text{№5. } \frac{375 \cdot 5^x - 5^{-x}}{5 \cdot 5^{-x} - 25^{-x}} \geq 5^x$$

$$\text{№6. } \frac{2^{2x+2} - 9 \cdot 2^{x+2} + 32}{2^{x+3} - 2^{2x}} \leq \frac{3}{2^x}$$

Вариант 4

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$$

$$\text{№2. } \frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leq 1 + \frac{1}{3^x - 2}$$

$$\text{№3. } \frac{3^{x \log_3 5} + 23}{25 - (0,2)^x} \leq 5^x$$

$$\text{№4. } \frac{30 \cdot 5^{x+3} - 0,2^{x+1}}{5^{3-x} - 25^{1-x}} \geq 5^{x-3}$$

$$\text{№5. } \frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \geq \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4}$$

$$\text{№6. } 3 \cdot \frac{8^x - 1}{2^x - 1} + \frac{0}{4^x + 2^x + 1} \leq 19$$

Вариант 5

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{4^x + 5}{2^x - 11} \geq -1$$

$$\text{№2. } \frac{7^{x+\log_7 2} + 28}{7^{2-x} - 1} \geq 7^x$$

$$\text{№3. } \frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leq 0$$

$$\text{№4. } \frac{6 \cdot 5^x - 11}{25^{x+0,5} - 6 \cdot 5^x + 1} \geq 0,25$$

$$\text{№5. } \frac{3}{3^x - 2} - \frac{2(3^{x+2} - 9)}{7(3^x - 3)} \leq -3$$

$$\text{№6. } \frac{64^x}{36^x - 27^x} + \frac{4(16^x - 12^x)}{16^x - 2 \cdot 12^x + 9^x} \leq \frac{16^{\frac{x+1}{2}}}{12^x - 9^x}$$

Вариант 6

Решите неравенства:

$$\text{№1. } \frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1$$

$$\text{№2. } \frac{10^{x \lg 3} - 27}{3^{1-x} - 9} \leq 3^x$$

$$\text{№3. } \frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leq 0$$

$$\text{№4. } \frac{2^{2x+3} - 5 \cdot 2^{x+3} + 32}{2^{x+2} - 2^{2x}} \leq \frac{7}{2^x}$$

$$\text{№5. } \frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{\frac{x+1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}$$

$$\text{№6. } \frac{27^x}{12^x - 8^x} + \frac{9^{x+1} - \frac{3}{2} \cdot 6^{x+1}}{9^x - 2 \cdot 6^x + 4^x} \leq \frac{2 \cdot 9^{\frac{x+1}{2}}}{6^x - 4^x}$$

■ Ответы (тест)

Сведение к рациональным неравенствам

	№1	№2	№3	№4	№5	№6
Вар.1	$(-\infty; 0];$ $(1; 2]$	$(-1; 3]$	$(-\infty; 0);$ $\{1\}$	$(-\infty; -4);$ $[-\log_3 7; \infty)$	$(-\infty; 3);$ $\left(4; \log_2 \frac{56}{3}\right];$ $[5; \infty)$	$\left[-\sqrt{8}; -\sqrt{5}\right);$ $\left(-\sqrt{5}; -2\right];$ $\left[2; \sqrt{5}\right); \left(\sqrt{5}; \sqrt{8}\right]$
Вар.2	$(0; \log_5 3]$	$(-\infty; -1); 0;$ $(0, 5; \infty)$	$(-\infty; \log_2 \sqrt{5}]$ $(2; \infty)$	$0; (1; 2)$	$(-\infty; -1);$ $(-1; 0);$ $[1; \log_3 4)$	$\left[-\sqrt{6}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right);$ $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -2\right];$ $\left[2; \frac{3}{\sqrt{2}}\right);$ $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \sqrt{6}\right]$
Вар.3	$(-\infty; 0];$ $(2; 3]$	$(-\infty; 1];$ $(\log_5 6; \infty)$	$(-\infty; 1];$ $(\log_3 6; 2)$	$(0; 1]$	$(-\infty; -\log_3 45];$ $(-1; \infty)$	$[-2; 3);$ $(3; \infty)$
Вар.4	$(-\infty; \log_7 4);$ $(1; \log_7 9]$	$(-\infty; 0];$ $(\log_3 2; 1)$	$(-\infty; -2);$ $[0; \infty)$	$(-\infty; -4 - \log_3 6];$ $(-1; \infty)$	$(-\infty; 0);$ $\frac{1}{3}; \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$	$\left[\log_5 \frac{\sqrt{3}-1}{2}; 0\right);$ $\left(0; \log_5 \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$
Вар.5	$(-\infty; 1];$ $(\log_2 11; \infty)$	$[1; 2)$	$\{0\}; (1; \log_2 3)$	$(-1; 0);$ $\log_5 3$	$[0; \log_3 2);$ $(1; 2]$	$(-\infty; 0);$ $\left\{\log_{\frac{4}{3}} 2\right\}$
Вар.6	$[2; 3)$	$(-\infty; -1);$ $[1; \infty)$	$(-\infty; -3];$ $(1, 5; 3]$	$[-3; 2);$ $(2; \infty)$	$(0; 1]; (2; \infty)$	$(-\infty; 0);$ $\left\{\log_{\frac{3}{2}} 3\right\}$

1. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$, если $a > 1$, функция возрастающая; знак неравенства сохраняется.
 2. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x)$, если $0 < a < 1$, функция убывающая; знак неравенства меняется на противоположный.
 3. $a^{f(x)} \vee b$, где $a, b > 0$, $a \neq 1$ неравенство сводится к неравенствам вида (1) или (2) с помощью основного логарифмического тождества $b = a^{\log_a b}$.
 4. К неравенствам вида $(a^{f(x)} - a^{g(x)}) \cdot h \vee 0$ применим метод замены множителя:
пусть $a > 1$, тогда множитель $(a^{f(x)} - a^{g(x)})$ можно заменить множителем $(f(x) - g(x))$ того же знака;
если $0 < a < 1$, то множитель $(a^{f(x)} - a^{g(x)})$ можно заменить противоположным множителем $(g(x) - f(x))$.
 5. Неравенства вида $f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}$ можно логарифмировать по основанию больше 1
- $$\begin{aligned} &\lg f(x)^{g(x)} \vee \lg f(x)^{h(x)} \\ &g(x) \lg f(x) \vee h(x) \lg f(x) \\ &(g(x) - h(x)) \cdot \lg f(x) \vee 0 \end{aligned}$$

✓ Свойства степеней

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$