

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

и.e.: а) $(5 \cdot 3)^{\cos x} \cdot 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} = 0$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- Тематические курсы/Уравнения/Комбинированные/ Показательные и тригонометрические
- Алгебра 11 / Показательные уравнения/ Показательные и тригонометрические
- ЕГЭ Профиль/ Задание 13/ Комбинированные уравнения

Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим

1. Переход к одному основанию степени
2. Переход к квадратному уравнению
3. ЕГЭ Задание 13

1. Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим, путем перехода к одному основанию степени

■ Примеры

1. а) Решите уравнение $6^{2\cos x} \cdot 4^{\cos x} = \frac{1}{12}$.

б) Указать сумму корней на промежутке $\left(-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. а) Решите уравнение $(64^{\cos x})^{\sin x} = 8^{\sqrt{3} \cdot \cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

3. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

4. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Тест**1. Переход к одному основанию степени****Вариант 1**

1. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

2. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $3^{2\sin x} \cdot 4^{\sin x} = 6$.

б) Укажите сумму корней на промежутке $(-2\pi; \pi)$.

4. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $2^{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Найдите корни уравнения этого уравнения, принадлежащие промежутку $(90^\circ; 180^\circ)$.

2. а) Решите уравнение $(36^{\cos x})^{\sin x} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{2}\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

3. а) Решите уравнение $(25^{\sin x})^{\cos x} = 5^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

4. а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

■ **Ответы (тест)**

1. Переход к одному основанию степени

	Вариант 1	Вариант 2
1.	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 6) -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.	a) $\pm 60^\circ + 180^\circ k; 6) 120^\circ$.
2.	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 6) \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}$.	a) $\pi k, \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 6) -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0$.
3.	a) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 6) -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.	a) $\pi k, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; 6) 3\pi, 4\pi, \frac{23\pi}{6}$.
4.	a) $-\frac{\pi}{4} + \pi k; 6) -\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$.	a) $-\frac{\pi}{4} + \pi k; 6) -\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}$.

2. Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим, путем перехода к квадратному уравнению

■ **Примеры**

1. а) Решите уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} - 3 = 0$.

6) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 4\pi]$.

2. а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$.

6) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3. Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$.

4. а) Решите уравнение $4^{\sin x + 3/4} - (2 + \sqrt{2}) \cdot 2^{\sin x} + 1 = 0$;

6) Укажите корень, ближайший к 100° .

5. а) Решите уравнение $2^{-\cos 2x} + 2\sqrt{2} = 5 \cdot 2^{\sin^2 x - 3/4}$;

6) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Тест**2. Переход к квадратному уравнению****Вариант 1**

1. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x} - 4 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi; 7\pi]$.

2. а) Решите уравнение $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

3. Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

4. Решите уравнение $4^{\frac{\sin x - 1}{4}} - \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \cdot 2^{\sin x} - 1 = 0$.

5. а) Решить уравнение $2^{\sin^2 3x} + 2^{0,5 \cos 6x} = 2\sqrt[4]{2}$.

б) В ответе указать сумму корней, принадлежащих промежутку $(0^\circ; 130^\circ)$.

6. а) Решите уравнение $2^{\cos 2x} + 3\sqrt{2} = 2^{\cos^2 x + 7/4}$;

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2. Решите уравнение $4^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 2^{\lg^2 x} - 3 = 0$.

3. Решите уравнение $3^{\lg \operatorname{tg} x} - 2 \cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x + 1} = 1$.

4. Решите уравнение $4^{3+2\cos 2x} - 2 = 7 \cdot 16^{\cos^2 x}$.

5. а) Решите уравнение $4^{\cos x + 1/2} - (1 + 2\sqrt{2}) \cdot 2^{\cos x} + \sqrt{2} = 0$;

б) Укажите корень, ближайший к 400° .

6. а) Решить уравнение $3^{\sin^2 15x} + 3^{0,5 \cos 30x} = 2\sqrt[4]{3}$.

б) В ответе укажите сумму корней, принадлежащих промежутку $(0^\circ; 26^\circ)$.

Ответы (текст)**2. Переход к квадратному уравнению**

	Вариант 1	Вариант 2
1.	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 6) $\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$.	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 6) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$.
2.	a) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; 6) $\frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$.	πk
3.	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$	$\arctg 10 + \pi k$
4.	$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$	$\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$
5.	a) $\pm 10^\circ + 60^\circ k$; 6) 240° .	a) $\pi + 2\pi k, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; 6) 420° .
6.	a) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; 6) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.	a) $\pm 2^\circ + 12^\circ k$; 6) 48°

3. Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим. ЕГЭ Задание 13

■ Примеры

№1.

a) Решите уравнение $\frac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7 \sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№2.

a) Решите уравнение $25^{\sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin 2x}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№3.

a) Решите уравнение $\left(\frac{1}{49}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)} = 7^{2\sqrt{3}\cos(2\pi-x)}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№4.

a) Решите уравнение $0,4^{\sin x} + 2,5^{\sin x} = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№5.

a) Решите уравнение $8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

№6.

a) Решите уравнение $5^{\sin x} + 5^{\sin(5\pi+x)} = \frac{26}{5}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{7}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Тест**Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим.****ЕГЭ Задание 13****Вариант 1**

№1.

a) Решите уравнение $\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

№2.

a) Решите уравнение $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\cos x} = 5^{\sqrt{3}\sin 2x}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№3.

a) Решите уравнение $49^{\cos(\pi-x)} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

№4.

a) Решите уравнение $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№5.

a) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№6.

a) Решите уравнение $2^{\operatorname{tg} x} + 2^{\operatorname{tg}(3\pi-x)} = \frac{5}{2}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

Вариант 2

№1.

a) Решите уравнение $25^{\cos(x+\pi)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№2.

a) Решите уравнение $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sin(\pi-x)} = 2^{3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

№3.

a) Решите уравнение $\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos(x+\pi)} = 3^{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№4.

a) Решите уравнение $4 \cdot 16^{\sin^2 x} - 6 \cdot 4^{\cos 2x} = 29$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№5.

a) Решите уравнение $8 \cdot 16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№6.

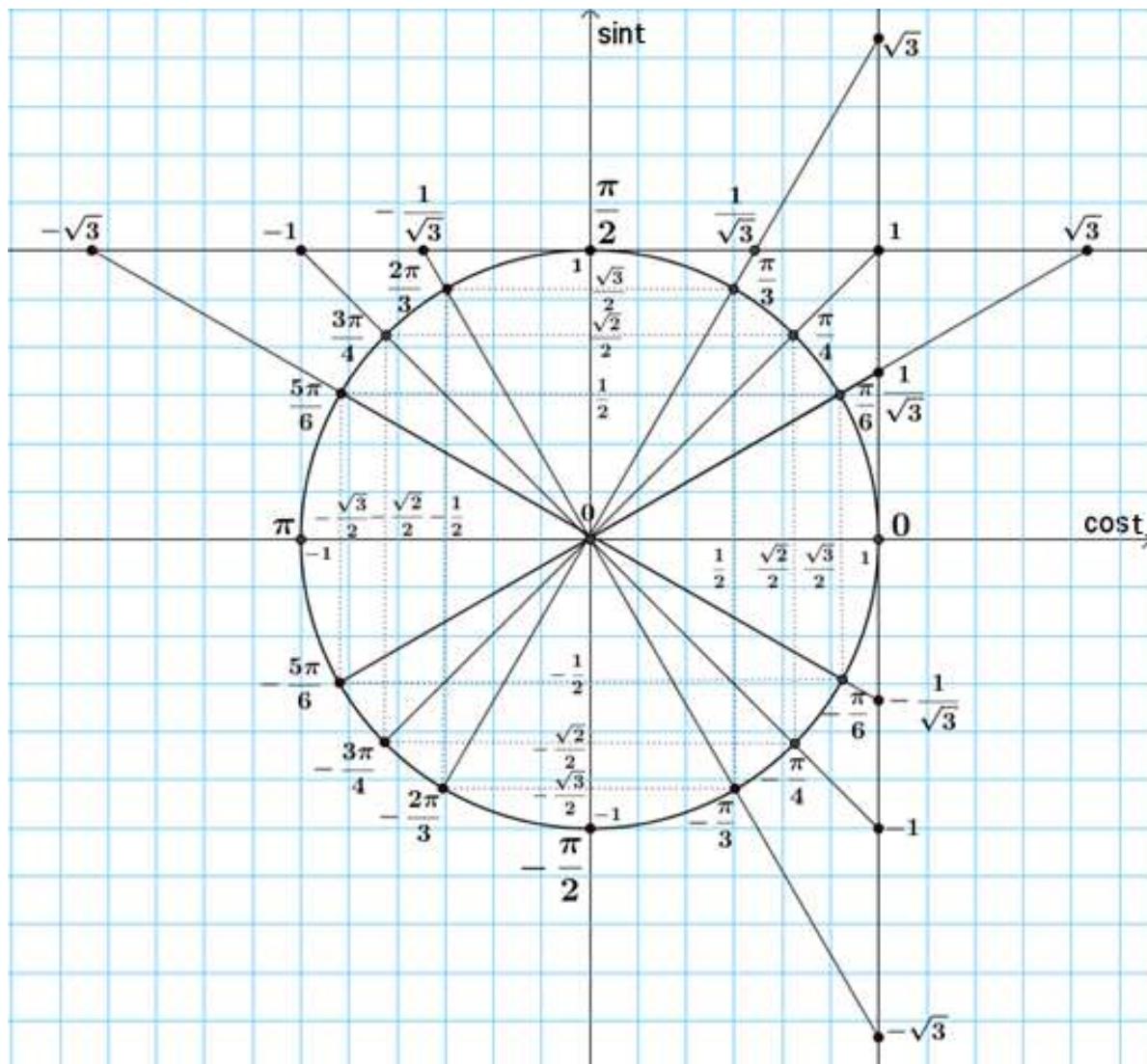
a) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{\sin(\pi+x)} = \frac{10}{3}$.

б) Указать корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответы (тест)**Показательные уравнения, сводящиеся к тригонометрическим.****ЕГЭ Задание 12**

	№1.	№2.	№3.	№4.	№5.	№6.
Вар.1	a) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\frac{17\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} + \pi k$, a) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{5\pi}{3};$ $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}$	a) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$ б) $-\frac{19\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$	a) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ б) $\frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$	a) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi k$ б) $3\pi, \frac{11\pi}{3}$	a) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ б) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.
Вар.2	a) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$; б) $\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $-\frac{4\pi}{3}$	a) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; б) $-\frac{23\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}$	a) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $\frac{2\pi}{3} + \pi n$ б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$	a) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi k$ б) $\frac{8\pi}{3}, 3\pi$	a) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

✓ Тригонометрический круг



 **Основные тригонометрические формулы**

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 2. \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 3. \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad 4. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$5. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad 6. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$7. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad 8. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$9. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad 10. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$11. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad 12. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$13. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$14. 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \quad 15. 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$16. \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad 17. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$18. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad 19. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$20. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 21. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$22. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \quad 23. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$24. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$25. \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad 26. \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad 27. \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$28. \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 29. \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$30. a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- ✓ Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ называют **показательным**, где $a > 0, a \neq 1$.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

- ✓ **Свойства степеней**

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$