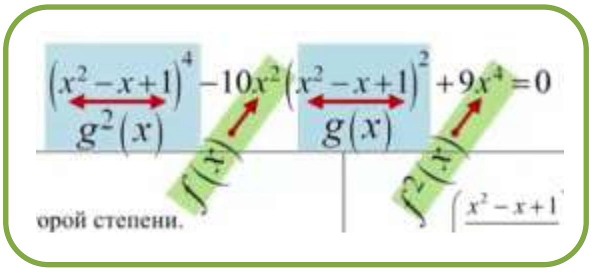
Тема: Рациональные уравнения

Профиль



1. Методы решения целых уравнений

2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

Содержание сборника:

1. Методы решения целых уравнений

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$.

№2. Решите уравнение $(x-2)(x-3)(x-8)(x-12)=4x^2$.

№3. Решите уравнение $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-9x+20\right)=25\left(x^2-7x\right)+118$.

№4. Решите уравнение $150x-5x^2-10x^3+x^4+125=0$.

№5. Решите уравнение $(4x+3)(2-4x)\left(16x^2+24x+14\right)=4(4x+4)^2$.

№1.

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=72$$

$$(x^2+5x)(x^2+5x+6)-72=0$$

Пусть $t=x^2+5x$

$$t(t+6)-72=0$$

$$t^2+6t-72=0$$

$t_1=6$ или $t_2=-12$

$x^2+5x=6$ $\quad$ $x^2+5x=-12$

$x^2+5x-6=0$ $\quad$ $x^2+5x+12=0$

$x_1=-6$ $\quad$ $D<0$

$x_2=1$ $\quad$ $x\in\varnothing$

Ответ:-6 и 1.

№2.

$$(x-2)(x-3)(x-8)(x-12)=4x^2$$

$$(x^2-14x+24)(x^2-11x+24)=4x^2$$

Разделим каждую часть уравнения на x^2.

Проверкой установим, что $x=0$ корнем не является.

$$\frac{x^2-14x+24}{x}\cdot\frac{x^2-11x+24}{x}=4$$

$$\left(x-14+\frac{24}{x}\right)\left(x-11+\frac{24}{x}\right)=4$$

Пусть $t=x+\dfrac{24}{x}$

$$(t-14)(t-11)-4=0$$

$$t^2-25t+150=0$$

$t_1=15$ $\quad$ $t_2=10$

$x+\dfrac{24}{x}=15$ $\quad$ $x+\dfrac{24}{x}=10$

$x^2-15x+24=0$ $\quad$ $x^2-10x+24=0$

$x_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{129}}{2}$ $\quad$ $x_3=6$ $\quad$ $x_2=4$

Ответ: $\dfrac{15\pm\sqrt{129}}{2}$***; 4 и 6.***

№3.

$$(x^2-5x+6)(x^2-9x+20)=25(x^2-7x)+118$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=25(x^2-7x)+118$$

$$(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)-25(x^2-7x)-118=0$$

Пусть $t=x^2-7x$

$$(t+10)(t+12)-25t-118=0$$

$$t^2-3t+2=0$$

$t_1=1$ $\quad$ $t_2=2$

$x^2-7x-1=0$ $\quad$ $x^2-7x-2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{53}}{2}$ $\quad$ $x_{3,4}=\dfrac{7\pm\sqrt{57}}{2}$

Ответ: $\dfrac{7\pm\sqrt{53}}{2}$; $\dfrac{7\pm\sqrt{57}}{2}$

№4.

$$150x-5x^2-10x^3+x^4+125=0$$

$$(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 5x+25x^2-30x^2+150x+125=0$$

$$(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)+125=0$$

Пусть $t=x^2-5x$

$$t^2-30t+125=0$$

$t_1=25$ $\quad$ $t_2=5$

$x^2-5x-25=0$ $\quad$ $x^2-5x-5=0$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm5\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $x_{3,4}=\dfrac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\dfrac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{5\pm5\sqrt{5}}{2}$

№5.

$$(4x+3)(2-4x)\left(16x^2+24x+14\right)=4(4x+4)^2$$

$\left(-16x^2-4x+6\right)\left(16x^2+24x+14\right)=4(4x+4)^2$

Разделим каждую часть уравнения на $(4x+4)^2$.

Проверкой установим, что $x=-1$ корнем не является.

$$\frac{-16x^2-4x+6}{4x+4}\cdot\frac{16x^2+24x+14}{4x+4}=4$$

Пусть $a=\dfrac{-16x^2-4x+6}{4x+4}$, $b=\dfrac{16x^2+24x+14}{4x+4}$.

Заметим, что $a+b=\dfrac{-16x^2-4x+6}{4x+4}+\dfrac{16x^2+24x+14}{4x+4}=5$.

Получим систему условий $\begin{cases}a+b=5\\ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}(1)\\ \begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}(2)\end{array}\right.$

$(1)\begin{cases}\dfrac{-16x^2-4x+6}{4x+4}=1\\ \dfrac{16x^2+24x+14}{4x+4}=4\end{cases}\Leftrightarrow 8x^2+4x-1=0,\quad \underline{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}}$

$(2)\begin{cases}\dfrac{-16x^2-4x+6}{4x+4}=4\\ \dfrac{16x^2+24x+14}{4x+4}=1\end{cases}$ Второе уравнение системы решений не имеет, поэтому $x\in\varnothing$

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$.

Тест 1. Методы решения целых уравнений

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $(x+6)(x+7)(x+9)(x+10)=10$	№2. $(x-3)(x-9)(x^2+8x+12)=56x^2$
№3. $(x^2-11x+30)(x^2-15x+56)=86(x^2-13x)+1677$	№4. $x^4-12x^3-6x^2+252x+216=0$
№5. $(2x+3)(1-2x)(4x^2+12x+13)=3(2x+4)^2$	

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$	№2. $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$
№3. $(2x+1)(3-2x)(4x^2+4x+5)=3(2x+2)^2$	№4. $80x-4x^2-8x^3+x^4+64=0$
№5. $25(x+13)(x+16)(x+21)=432x$	

▪ *Ответы (тест)* 1. Методы решения целых уравнений

	№1	№2	№3	№4	№5
Вар.1	$-8\pm\sqrt{6}$	$\frac{11\pm\sqrt{193}}{2}$, *2 и -9*	$\frac{13\pm\sqrt{173}}{2}$, $\frac{13\pm\sqrt{181}}{2}$	$3\pm3\sqrt{5},\ 3\pm\sqrt{15}$	$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$
Вар.2	*-6 и 2*	$\frac{-21\pm\sqrt{369}}{2}$, *1 и 18*	$\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$	$2\pm2\sqrt{5},\ 2\pm2\sqrt{2}$	*-25*

▪ *Решение (тест)* 1. Методы решения целых уравнений

Вариант 1

№1.

$$(x+6)(x+7)(x+9)(x+10)=10$$

$(x^2+16x+60)(x^2+16x+63)-10=0$

$t=x^2+16+60$

$t(t+3)-10=0$

$t^2+3t-10=0$

$t_1=2$	$t_2=5$
$x^2+16x+60=2$	$x^2+16x+60=-5$
$x^2+16x+58=0$	$x^2+16x+65=0$
$D/4=64-58=6$	$D/4=64-65=-1<0$
$\underline{x=-8\pm\sqrt{6}}$	$x\in\varnothing$

Ответ: $-8\pm\sqrt{6}$

№2.

$$(x-3)(x-9)(x^2+8x+12)=56x^2$$

$(x-3)(x-9)(x+2)(x+6)=56x^2$

$(x^2+3x-18)(x^2-7x-18)=56x^2 \,|\, : x^2$

$\left(x+3-\frac{18}{x}\right)\left(x-7-\frac{18}{x}\right)=56$

$t=x-\frac{18}{x}$

$(t+3)(t-7)-56=0$

$t^2-4t-77=0$

$t=11$	$t=-7$
$x-\frac{18}{x}=11$	$x-\frac{18}{x}=-7$
$x^2-11x-18=0$	$x^2+7x-18=0$
$\underline{x=\frac{11\pm\sqrt{193}}{2}}$	$\underline{x=2}$ $\underline{x=-9}$

Ответ: $\frac{11\pm\sqrt{193}}{2}$, ***2 и -9***

№3.

$$\left(x^2-11x+30\right)\left(x^2-15x+56\right)=86\left(x^2-13x\right)+1677$$

$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)=86\left(x^2-13x\right)+1677$

$\left(x^2-13x+40\right)\left(x^2-13x+42\right)-86\left(x^2-13x\right)-1677=0$

$t=x^2-13x$

$(t+40)(t+42)-86t-1677=0$

$t^2+82t+1680-86t-1677=0$

$t^2-4t+3=0$

$t_1=1$ $\qquad t_2=3$

$x^2-13x=1$ $\qquad x^2-13x=3$

$x^2-13x-1=0$ $\qquad x^2-13x-3=0$

$\underline{x=\dfrac{13\pm\sqrt{173}}{2}}$ $\qquad \underline{x=\dfrac{13\pm\sqrt{181}}{2}}$

№4.

$$x^4-12x^3-6x^2+252x+216=0$$

$\left(x^2\right)^2-2\cdot 6x\cdot x^2+36x^2-42x^2+252x+216=0$

$\left(x^2-6x\right)^2-42\left(x^2-6x\right)+216=0$

$t=x^2-6x$

$t^2-42t+216=0$

$D/4=21^2-216=225=15^2$

$t=21\pm15=\left|\begin{matrix}36\\6\end{matrix}\right.$

$x^2-6x=36$ $\qquad x^2-6x=6$

$x^2-6x-36=0$ $\qquad x^2-6x-6=0$

$\underline{x=3\pm3\sqrt{5}}$ $\qquad \underline{x=3\pm\sqrt{15}}$

№5.

$$(2x+3)(1-2x)\left(4x^2+12x+13\right)=3(2x+4)^2$$

$\left(-4x^2-4x+3\right)\left(4x^2+12x+13\right)=3(2x+4)^2$

$\dfrac{-4x^2-4x+3}{2x+4}\cdot\dfrac{4x^2+12x+13}{2x+4}=3$

$a=\dfrac{-4x^2-4x+3}{2x+4}\qquad b=\dfrac{4x^2+12x+13}{2x+4}$

$a+b=\dfrac{-4x^2-4x+3}{2x+4}+\dfrac{4x^2+12x+13}{2x+4}=\dfrac{8x+16}{2x+4}=\dfrac{8(x+2)}{2(x+2)}=4$

$$\begin{cases}a+b=4\\a\cdot b=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\ (1)\\[2mm]\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\ (2)\end{array}\right.$$

$$(1)\ \begin{cases}\dfrac{-4x^2-4x+3}{2x+4}=1\\[2mm]\dfrac{4x^2+12x+13}{2x+4}=3\end{cases}\Leftrightarrow\quad \begin{array}{c}4x^2+6x+1=0\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}\end{array}$$

$$(2)\ \begin{cases}\dfrac{-4x^2-4x+3}{2x+4}=3\\[2mm]\dfrac{4x^2+12x+13}{2x+4}=1\end{cases}$$

Первое уравнение системы (2) решений не имеет, поэтому и вся система решений не имеет.

Ответ: $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Вариант 2

№1.

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=105$$

$$(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)-105=0$$

$t=x^2+4x$

$(t-5)(t+3)-105=0$

$t^2-2t-120=0$

$t_1=12$ $\qquad$ $t_2=-10$

$x^2+4x-12=0$ $\qquad$ $x^2+4x+10=0$

$x_1=-6$ $\qquad$ $D<0$

$x_2=2$ $\qquad$ $x\in\varnothing$

Ответ: -6 и 2

№2.

$$(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$$

$(x-3)(x+9)(x-6)(x+2)=300x^2$

$(x^2-9x+18)(x^2+11x+18)=300x^2 \,\big|: x^2$

$\dfrac{x^2-9x+18}{x}\cdot\dfrac{x^2+11x+18}{x}=300$

$\left(x-9+\dfrac{18}{x}\right)\left(x+11+\dfrac{18}{x}\right)=300$

$t=x+\dfrac{18}{x},\quad (t-9)(t+11)-300=0$

$t^2+2t-399=0,\quad D/4=1+399=400$

$t_1=19$ $\qquad$ $t_2=-21$

$x+\dfrac{18}{x}=19$ $\qquad$ $x+\dfrac{18}{x}=-21$

$x^2-19x+18=0$ $\qquad$ $x^2+21x+18=0$

$x_1=1\quad x_2=18$ $\qquad$ $x=\dfrac{-21\pm\sqrt{369}}{2}$

№3.

$$(2x+1)(3-2x)(4x^2+4x+5)=3(2x+2)^2$$

$(-4x^2+4x+3)(4x^2+4x+5)=3(2x+2)^2$

$\dfrac{-4x^2+4x+3}{2x+2}\cdot\dfrac{4x^2+4x+5}{2x+2}=3$

Пусть $a=\dfrac{-4x^2+4x+3}{2x+2},\ b=\dfrac{4x^2+4x+5}{2x+2}$

$a+b=\dfrac{-4x^2+4x+3}{2x+2}+\dfrac{4x^2+4x+5}{2x+2}=\dfrac{8x+8}{2x+2}=4$

$$\begin{cases}a+b=4\\ a\cdot b=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}(1)\\ \begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}(2)\end{array}\right.$$

$$(1)\ \begin{cases}\dfrac{-4x^2+4x+3}{2x+2}=1\\ \dfrac{4x^2+4x+5}{2x+2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\quad 4x^2-2x-1=0,\quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$$(2)\ \begin{cases}\dfrac{-4x^2+4x+3}{2x+2}=3\\ \dfrac{4x^2+4x+5}{2x+2}=1\end{cases}$$

Первое уравнение системы не имеет решений, поэтому система решений не имеет

№4.

$$80x-4x^2-8x^3+x^4+64=0$$

$\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 4x+16x^2-20x^2+80x+64=0$

$\left(x^2-4x\right)^2-20\left(x^2-4x\right)+64=0$

$t=x^2-4x$

$t^2-20t+64=0$

$t_1=16$	$t_2=4$
$x^2-4x=16$	$x^2-4x=4$
$x^2-4x-16=0$	$x^2-4x-4=0$
$\underline{x=2\pm2\sqrt{5}}$	$\underline{x=2\pm2\sqrt{2}}$

Ответ: $2\pm2\sqrt{2}$ ***и*** $2\pm2\sqrt{5}$

№5.

$$25(x+13)(x+16)(x+21)=432x$$

$\frac{13+16+21}{2}=25$

$t=x+25$

$25\cdot(t-12)(t-9)(t-4)=432(t-25)$

$25\cdot\left(t^2-21t+108\right)(t-4)=432(t-25)$

$25t^3-625t^2+4368t=0$

$t\left(25t^2-625t+4368\right)=0$

$t=0$		$25t^2-626t+4368=0$
$x+25=0$	или	$D<0$
$\underline{x=-25}$		$\varnothing$

Ответ: -25

2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

✓ *Уравнение вида* $a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$ *называют*

однородным второй степени.

Найдите те значения переменной, при которых $f(x)=0$ *или* $g(x)=0$.

Проверкой установите: является или нет, это значение корнем уравнения.
Сводим к квадратному уравнению делением на одно из выражений в квадрате: $f^2(x)$ *или* $g^2(x)$.

$$a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0 \;\mid :g^2(x)$$

$$a\cdot\frac{f^2(x)}{g^2(x)}+b\cdot\frac{f(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}+c=0$$

$$a\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2+b\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+c=0$$

$$t=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$a\cdot t^2+b\cdot t+c=0$$

✓ *В уравнениях вида* $(x-a)^4+(x-b)^4=c$ *рекомендуется делать замену*

$$t=x-\frac{a+b}{2}.$$

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $60x-38x^2-3x^3+x^4+400=0$.

№2. Решите уравнение $\left(x^2-x+1\right)^4-10x^2\left(x^2-x+1\right)^2+9x^4=0$.

№3. Решите уравнение $\left(x^2+2x-5\right)^4+\left(x^2-4x-5\right)^4=272x^4$.

№4. а) Решите уравнение $\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{8}{(x-1)^2}=7\left(\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{2}{x-1}\right)-1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;3]$.

№1. $60x-38x^2-3x^3+x^4+400=0$

Проверкой установим, что $x=0$ корнем не является, поэтому разделим каждую часть уравнения на x^2

$$\frac{60}{x}-38-3x+x^2+\frac{400}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{400}{x^2}\right)+3\left(\frac{20}{x}-x\right)-38=0$$

$$\text{Пусть } t=\frac{20}{x}-x,\text{ тогда } t^2=\left(\frac{20}{x}-x\right)^2,\quad t^2=x^2-2\cdot\frac{20}{x}\cdot x+\frac{400}{x^2},\quad t^2+40=x^2+\frac{400}{x^2}$$

$$t^2+40+3t-38=0$$

$$t^2+3t+2=0$$

$$t_1=-1 \qquad t_2=-2$$

$$\frac{20}{x}-x=-1 \qquad \frac{20}{x}-x=-2$$

$$x^2-x-20=0 \qquad x^2-2x-20=0$$

$$\underline{x_1=-4} \quad \underline{x_2=5} \qquad \underline{x_{3,4}=1\pm\sqrt{21}}$$

Ответ: *-4; 5;* $1\pm\sqrt{21}$

№2. $\left(x^2-x+1\right)^4-10x^2\left(x^2-x+1\right)^2+9x^4=0$

Однородное уравнение второй степени. Проверкой установим, что $x=0$ корнем не является, поэтому разделим каждую часть уравнения на x^4.

$$\frac{\left(x^2-x+1\right)^4}{x^4}-\frac{10x^2\left(x^2-x+1\right)^2}{x^2\cdot x^2}+9=0$$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4-10\cdot\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2+9=0$$

$$\text{Пусть } t=\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2,\ \text{ тогда } \ t^2-10t+9=0,\quad t_1=1 \text{ и } t_2=9$$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2=1 \qquad \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2=9$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-x+1}{x}=1\\ \dfrac{x^2-x+1}{x}=-1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-x+1}{x}=3\\ \dfrac{x^2-x+1}{x}=-3\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=2\pm\sqrt{3}\\ x=-1\end{array}\right.$$

$$\underline{x=\left\{-1;1;2\pm\sqrt{3}\right\}}$$

Ответ: $\pm1,\ 2\pm\sqrt{3}$

№3. $$\left(x^2+2x-5\right)^4+\left(x^2-4x-5\right)^4=272x^4$$

1)Проверкой установим, что $x=0$ корнем не является. Разделим каждую часть уравнения на x^4.

$$\left(\frac{x^2+2x-5}{x}\right)^4+\left(\frac{x^2-4x-5}{x}\right)^4=272$$

$$\left(x+2-\frac{5}{x}\right)^4+\left(x-4-\frac{5}{x}\right)^4=272$$

Пусть $t=x-\frac{5}{x}$, тогда

$$(t+2)^4+(t-4)^4=272$$

$$(t-1+3)^4+(t-1-3)^4=272$$

2) Пусть $z=t-1$, тогда

$$(z+3)^4+(z-3)^4=272$$

$$\left(z^2+6z+9\right)^2+\left(z^2-6z+9\right)^2=272$$

$$z^4+54z^2-55=0$$

$$\left(z^2\right)_1=1 \qquad \left(z^2\right)_2=-55$$

$$z_1=1 \qquad z_2=-1 \qquad z\in\varnothing$$

$$t_1=2 \qquad t_2=0$$

$$x-\frac{5}{x}=2 \qquad x-\frac{5}{x}=0$$

$$x=1\pm\sqrt{6} \qquad x=\pm\sqrt{5}$$

Ответ: $1\pm\sqrt{6};\quad \pm\sqrt{5}$

№4. а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}=7\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)-1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;3]$.

Решение:

а) Пусть $t=\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}$, тогда

$$t^2=\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)^2=\frac{(x-1)^2}{16}-1+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}\right)-1$$

$$2t^2+2=\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}$$

Получим уравнение $2t^2+2=7t-1$, $\quad 2t^2-7t+3=0$, $\quad t_1=3$ или $t_2=\frac{1}{2}$. Вернемся к замене.

$$\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=3 \qquad \frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-14x+5=0 \qquad x^2-4x-5=0$$

$$x=7\pm2\sqrt{11} \qquad x=-1;\ x=5$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-2;3]$.

$$x=-1\in[-2;3];\quad x=5\notin[-2;3];\quad x=7+2\sqrt{11}\notin[-2;3]$$

$$x=7-2\sqrt{11}\in[-2;3]$$

$$7-2\sqrt{11}\vee3 \qquad 7-2\sqrt{11}\vee-2$$

$$4\vee2\sqrt{11} \qquad 11\vee2\sqrt{11}$$

$$16\vee44,\quad 7-2\sqrt{11}<3; \qquad 121\vee44;\quad 7-2\sqrt{11}>-2$$

Ответ: а) $7\pm2\sqrt{11}$***, -1, 5; б)*** $7-2\sqrt{11}$***; -1.***

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

№2. $x^4-10x^2-3x^3-45x+225=0$

№3. $\left(x^2+2\right)^2+x\left(x^2+2\right)=12x^2$

№4. $2x^4-x^2(x+2)-(x+2)^2=0$

№5. $\left(x^2+x+1\right)^2-14(x-1)^2=5\left(x^3-1\right)$

№6. $\left(\sqrt{x}+1\right)^4+\left(\sqrt{x}-3\right)^4=32$

№7.

а) Решите уравнение $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{18}{(x-2)^2}=7\left(\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{3}{x-2}\right)+10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;2]$.

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0$

№2. $x^4-6x^3+12x^2-12x+4=0$

№3. $3x\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4x+1\right)^2=12x^2$

№4. $3x^4+2x^2(x-2)-(x-2)^2=0$

№5. $10\left(x^2-x+1\right)^2-3(x+1)^2=7\left(x^3+1\right)$

№6. $\left(\sqrt{x}-4\right)^4+\left(\sqrt{x}-8\right)^4=32$

№7.

а) Решите уравнение $\dfrac{(x+3)^2}{5}+\dfrac{20}{(x+3)^2}=8\left(\dfrac{x+3}{5}-\dfrac{2}{x+3}\right)+1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6;-4]$.

▪ *Ответы (тест)* 2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
Вар.1	*1;* $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$	*3 и 5*	*1; 2;* $-2\pm\sqrt{2}$	*-1; 2*	*2; 4;* $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$	*1*	*а)* $-1;\ 4;\ 6\pm\sqrt{22}$ *б)* $-1;\ 6-\sqrt{22}$
Вар.2	*1;* $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$	$2\pm\sqrt{2}$	$2\pm\sqrt{3}$	*-2; 1*	*0 и 2*	*36*	*а)* $-5;\ 2;\ \frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$ *б)* $-5;\ -\frac{1+\sqrt{65}}{2}$

▪ *Решение (тест)* 2. Методы решения целых уравнений (продолжение)

Вариант 1

№1.

$$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$$

$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0\,\big|:x^2$

$(x=0 \text{ корнем не является})$

$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$

$\left|t=x+\frac{1}{x},\ t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2},\ t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}\right.$

$t^2-2-5t+8=0$

$t^2-5t+6=0$

$t_1=2$

$x+\frac{1}{x}=2$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\underline{x=1}$

$t_2=3$

$x+\frac{1}{x}=3$

$x^2-3x+1=0$

$\underline{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

№2.

$$x^4-10x^2-3x^3-45x+225=0$$

$x^4-10x^2-3x^3-45x+225=0\,\big|:x^2$

$x^2-10-3x-\frac{45}{x}+\frac{225}{x^2}=0$

$x^2+\left(\frac{15}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{15}{x}\right)-10=0$

$\left|t=x+\frac{15}{x},\ t^2=x^2+30+\frac{225}{x^2},\ t^2-30=x^2+\frac{225}{x^2}\right.$

$t^2-30-3t-10=0$

$t^2-3t-40=0$

$t_1=8$

$x+\frac{15}{x}=8$

$x^2-8x+15=0$

$x_1=3$

$x_2=5$

$t_2=-5$

$x+\frac{15}{x}=-5$

$x^2+5x+15=0$

$D<0$

$x\in\varnothing$

$\underline{x=\{3;5\}}$

№3.

$$\left(x^2+2\right)^2+x\left(x^2+2\right)=12x^2$$

$\left(x^2+2\right)^2+x\left(x^2+2\right)=12x^2 \Big| : x^2$

$\left(x=0 \text{ корнем не является}\right)$

$\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right)^2+\dfrac{x^2+2}{x}-12=0$

$t=\dfrac{x^2+2}{x}$

$t^2+t-12=0$

$t_1=-4 \qquad t_2=3$

$\dfrac{x^2+2}{x}=-4 \qquad \dfrac{x^2+2}{x}=3$

$x^2+4x+2=0 \qquad x^2-3x+2=0$

$D/4=4-2=2 \qquad x_3=1$

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2} \qquad x_4=2$

$\underline{x=\left\{1;\ 2;\ -2\pm\sqrt{2}\right\}}$

№4.

$$2x^4-x^2\left(x+2\right)-\left(x+2\right)^2=0$$

$2x^4-x^2\left(x+2\right)-\left(x+2\right)^2=0 \Big| : \left(x+2\right)^2$

$\left(x=-2 \text{ корнем не является}\right)$

$2\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^2-\dfrac{x^2}{x+2}-1=0$

$\dfrac{x^2}{x+2}=t,\quad 2t^2-t-1=0$

$D=1+8=9,\quad t=\dfrac{1\pm3}{4}=\left| \begin{array}{l} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$\dfrac{x^2}{x+2}=1 \qquad \dfrac{x^2}{x+2}=-\dfrac{1}{2}$

$x^2-x-2=0 \qquad 2x^2+x+2=0$

$x_1=2 \qquad D<0$

$x_2=-1 \qquad x\in\varnothing$

$\underline{x\in\left\{-1;\ 2\right\}}$

№5.

$$\left(x^2+x+1\right)^2-14\left(x-1\right)^2=5\left(x^3-1\right)$$

$\left(x^2+x+1\right)^2-14\left(x-1\right)^2=5\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\Big| : \left(x-1\right)^2$

$\left(x=1 \text{ корнем не является}\right)$

$\left(\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2-14-5\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=0$

$t=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

$t^2-5t-14=0$

$t_1=7 \qquad t_2=-2$

$\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7 \qquad \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-2$

$x^2-6x+8=0 \qquad x^2+3x-1=0$

$x_1=2 \qquad D=9+4=13$

$x_2=4 \qquad x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\underline{x=\left\{2;\ 4;\ \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}}$

№6.

$$\left(\sqrt{x}+1\right)^4+\left(\sqrt{x}-3\right)^4=32$$

Пусть $t=\sqrt{x}$

$\left(t+1\right)^4+\left(t-3\right)^4=32$

$\Big| z=t-\dfrac{-1+3}{2}=t-1;\ t=z+1$

$\left(z+2\right)^4+\left(z-2\right)^4=32$

$\left(z^2+4z+4\right)^2+\left(z^2-4x+4\right)^2=32$

$2z^4+48z^2+32=32$

$z^2\left(z^2+24\right)=0$

$z^2=0 \qquad z^2+24=0$

$z=0 \qquad \varnothing$

$t=1$

$1=\sqrt{x}$

$\underline{x=1}$

№7. **а) Решите уравнение** $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10$**.**

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;2]$**.**

Решение:

а) Пусть $t=\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}$, тогда

$$t^2=\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)^2=\frac{(x-2)^2}{4}-3+\frac{9}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}\right)-3$$

$$2t^2+6=\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}$$

Получим уравнение $2t^2+6=7t+10,\quad 2t^2-7t-4=0,\quad t_1=4$ или $t_2=-\frac{1}{2}$. Вернемся к замене.

$$\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=4 \qquad\qquad \frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=-\frac{1}{2}$$

$$x^2-12x+14=0 \qquad\qquad x^2-3x-4=0$$

$$x=6\pm\sqrt{22} \qquad\qquad x=-1;\ \ x=4$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-2;2]$.

$$x=-1\in[-2;2];\quad x=4\notin[-2;2];\quad x=6+\sqrt{22}\notin[-2;2]$$

$$x=6-\sqrt{22}\in[-2;2]$$

$$6-\sqrt{22}\vee 2 \qquad\qquad 6-\sqrt{22}\vee -2$$

$$4\vee\sqrt{22} \qquad\qquad 8\vee\sqrt{22}$$

$$16\vee 22,\quad 6-\sqrt{22}<2;\quad 64\vee 22;\quad 6-\sqrt{22}>-2$$

Ответ: а) $6\pm\sqrt{22}$ ***, -1, 4; б)*** $6-\sqrt{22}$ ***; -1.***

Вариант 2

№1.

$$x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0$$

$x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0 \quad \Big| : x^2$

$(x=0$ корнем не является$)$

$x^2-7x+12-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+12=0$

$\Big| t=x+\dfrac{1}{x},\ t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2},\ t^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$t^2-2-7t+12=0$

$t^2-7t+10=0$

$t_1=2 \qquad t_2=5$

$x+\dfrac{1}{x}=2 \qquad x+\dfrac{1}{x}=5$

$x^2-2x+1=0 \qquad x^2-5x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$\underline{x=1}$

№2.

$$x^4-6x^3+12x^2-12x+4=0$$

$x^4-6x^3+12x^2-12x+4=0 \quad \Big| : x^2$

$x^2-6x+12-\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0$

$x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+12=0$

$\Big| t=x+\dfrac{2}{x},\ t^2=x^2+4+\dfrac{4}{x^2},\ t^2-4=x^2+\dfrac{4}{x^2}$

$t^2-4-6t+12=0$

$t^2-6t+8=0$

$t_1=2 \qquad t_2=4$

$x+\dfrac{2}{x}=2 \qquad x+\dfrac{2}{x}=4$

$x^2-2x+2=0 \qquad x^2-4x+2=0$

$D<0 \qquad x=2\pm\sqrt{2}$

$x\in\varnothing$

$\underline{x=2\pm\sqrt{2}}$

№3.

$$3x\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4x+1\right)^2=12x^2$$

$3x\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4x+1\right)^2=12x^2 \quad \Big| : x^2$

$(x=0$ корнем не является$)$

$3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)+\left(\dfrac{x^2+1}{x}-4\right)^2-12=0$

$$t=\frac{x^2+1}{x}$$

$$3t+(t-4)^2-12=0$$

$$t^2-5t+4=0$$

$t_1=4 \qquad t_2=1$

$\dfrac{x^2+1}{x}=4 \qquad \dfrac{x^2+1}{x}=1$

$x^2-4x+1=0 \qquad x^2-x+1=0$

$D/4=4-1=3 \qquad D<0$

$\varnothing$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$

$\underline{x=\left\{2\pm\sqrt{3}\right\}}$

№4.

$$3x^4+2x^2(x-2)-(x-2)^2=0$$

$3x^4+2x^2(x-2)-(x-2)^2=0 \Big| :(x-2)^2$

$(x=2$ корнем не является$)$

$3\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2+2\cdot\dfrac{x^2}{x-2}-1=0$

$$\frac{x^2}{x-2}=t$$

$$3t^2+2t-1=0$$

$D/4=1+3=4, \quad t=\dfrac{-1\pm2}{3}=\Bigg| \begin{matrix}-1\\ \dfrac{1}{3}\end{matrix}$

$\dfrac{x^2}{x-2}=-1 \qquad \dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{1}{3}$

$x^2+x-2=0 \qquad 3x^2-x+2=0$

$x_1=-2 \qquad D<0$

$x_2=1 \qquad x\in\varnothing$

$\underline{x=\{1;-2\}}$

№5.

$$10\left(x^2-x+1\right)^2-3\left(x+1\right)^2=7\left(x^3+1\right)$$

$$10\left(x^2-x+1\right)^2-3\left(x+1\right)^2=7\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\Big| :\left(x+1\right)^2$$

$\left(x=-1 \text{ корнем не является}\right)$

$$10\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)^2-3-7\cdot\frac{x^2-x+1}{x+1}=0$$

$$t=\frac{x^2-x+1}{x+1}$$

$$10t^2-7t-3=0$$

$t_1=1$ $\qquad$ $t_2=-\frac{3}{10}$

$\frac{x^2-x+1}{x+1}=1$ $\qquad$ $\frac{x^2-x+1}{x+1}=-\frac{3}{10}$

$x^2-2x=0$ $\qquad$ $10x^2-7x+13=0$

$x_1=2$ $\qquad$ $D<0$

$x_2=0$ $\qquad$ $\varnothing$

$\underline{x=\{0;2\}}$

№6.

$$\left(\sqrt{x}-4\right)^4+\left(\sqrt{x}-8\right)^4=32$$

Пусть $t=\sqrt{x}$

$$\left(t-4\right)^4+\left(t-8\right)^4=32$$

$$\Big| z=t-\frac{4+8}{2}=t-6;\ t=z+6$$

$$\left(z+2\right)^4+\left(z-2\right)^4=32$$

$$\left(z^2+4z+4\right)^2+\left(z^2-4x+4\right)^2=32$$

$$2z^4+48z^2+32=32$$

$$z^2\left(z^2+24\right)=0$$

$z^2=0$ $\qquad$ $z^2+24=0$

$z=0$ $\qquad$ $\varnothing$

$t=6$

$6=\sqrt{x}$

$\underline{x=36}$

№7. **а) Решите уравнение** $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}=8\left(\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}\right)+1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6;-4]$.

Решение:

а) Пусть $t=\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}$, тогда

$$t^2=\left(\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}\right)^2=\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{4}{5}+\frac{4}{(x+3)^2}=\frac{1}{5}\left(\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}\right)-\frac{4}{5}$$

$$5t^2+4=\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}$$

Получим уравнение $5t^2+4=8t+1$, $\quad 5t^2-8t+3=0$, $\quad t_1=1$ или $\quad t_2=\frac{3}{5}$. Вернемся к замене.

$\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}=1$ $\qquad$ $\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}=\frac{3}{5}$

$x^2+x-16=0$ $\qquad$ $x^2+3x-10=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$ $\qquad$ $x=2;\ \ x=-5$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-6;-4]$.

$$x=-5\in[-6;-4];\quad x=2\notin[-6;-4];\quad x=\frac{-1+\sqrt{65}}{2}\notin[-6;-4]$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{65}}{2}\in[-6;-4]$$

$$\frac{-1-\sqrt{65}}{2}\vee-6 \qquad \frac{-1-\sqrt{65}}{2}\vee-4$$

$$11\vee\sqrt{65} \qquad 7\vee\sqrt{65}$$

$$121\vee 65,\quad \frac{-1-\sqrt{65}}{2}>-6;\qquad 49\vee 65;\quad \frac{-1-\sqrt{65}}{2}<-4$$

Ответ: а) $\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$ ***, 2,- 5; б)*** $\frac{-1-\sqrt{65}}{2}$ ***; -5.***

3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

▪ ***Примеры*** Решите уравнения:

№1. Решите уравнение $\frac{2}{8x^3+4x^2-2x-1}+\frac{1}{1-4x^2}+\frac{x}{4x^2+4x+1}=0.$

№2. Решите уравнение $1+\left(2+\left(x+3^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+6}{6x+5}.$

№3. Решите уравнение $\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}}=\frac{4}{\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}}.$

№4. Решите уравнение $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}.$

№5. Решите уравнение $x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21.$

№6. Решите уравнение $\frac{20x}{x^2+3x+10}+1=\frac{20x}{x^2+2x+10}.$

✓ *Алгоритм решения дробно-рационального уравнения*:

1. *Привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;*
2. *Решить получившееся целое уравнение;*
3. *Исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.*

✓ *Дробь не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль.*
ОДЗ - область допустимых значений переменной, входящей в уравнение.

✓ *Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

№1.

$$\frac{2}{8x^3+4x^2-2x-1}+\frac{1}{1-4x^2}+\frac{x}{4x^2+4x+1}=0$$

$$\frac{2}{4x^2(2x+1)-(2x+1)}-\frac{1}{4x^2-1}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

$$\frac{2}{(2x+1)(4x^2-1)}-\frac{1}{4x^2-1}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

ОДЗ: $4x^2-1\neq 0,\ x^2=\frac{1}{4},\ \begin{matrix} x\neq \frac{1}{2} \\ x\neq -\frac{1}{2} \end{matrix}$

$$\frac{2}{(2x+1)^2(2x-1)}-\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)^2}=0$$

$$2-(2x+1)+x(2x-1)=0$$

$$2-2x-1+2x^2-x=0$$

$$2x^2-3x+1=0,\ \ x=\frac{3\pm 1}{4}=\left| \begin{matrix} 1\in \text{ОДЗ} \\ \frac{1}{2}\notin \text{ОДЗ} \end{matrix} \right.$$

$\underline{x=1}$

Ответ: 1.

№2.

$$1+\left(2+\left(x+3^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+6}{6x+5}$$

1) $x+3^{-1}=x+\frac{1}{3}=\frac{3x+1}{3}$

2) $\left(\frac{3x+1}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{3x+1},\ 3x+1\neq 0,\ x\neq -\frac{1}{3}$

3) $2+\frac{3}{3x+1}=\frac{6x+2+3}{3x+1}=\frac{6x+5}{3x+1}$

4) $\left(\frac{6x+5}{3x+1}\right)^{-1}=\frac{3x+1}{6x+5},\ 6x+5\neq 0,\ x\neq -\frac{5}{6}$

5) $1+\frac{3x+1}{6x+5}=\frac{6x+5+3x+1}{6x+5}=\frac{9x+6}{6x+5}$

Вернемся к уравнению

$$\frac{9x+6}{6x+5}=\frac{9x+6}{6x+5},\ \ x\in R$$

С учетом ОДЗ $\underline{x\in\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)\cup\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\infty\right)}$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)\cup\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\infty\right).$

№3.

$$\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}}=\frac{4}{\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}}$$

1) $\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}=\frac{x-10-2(x-7)}{(x-7)(x-10)}=$

$=\frac{-x+4}{(x-7)(x-10)}=\frac{-(x-4)}{(x-7)(x-10)}$

2) $\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}=\frac{2}{x-10}-\frac{1}{x-7}=$

$=-\left(\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}\right)=-\frac{-x+4}{(x-7)(x-10)}=$

$=\frac{x-4}{(x-7)(x-10)}$

Вернемся к уравнению

$$\frac{-x(x-3)}{\frac{-(x-4)}{(x-7)(x-10)}}=\frac{4}{\frac{x-4}{(x-7)(x-10)}}$$

ОДЗ: $x\neq 7,\ x\neq 10,\ x\neq 4$

$$x^2-3x-4=0$$

$x_1=4\notin$ ОДЗ $\quad x_2=-1\in$ ОДЗ

$\underline{x=-1}$

Ответ: -1.

№4.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{6}{x+6}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{6}{x+6}\right)+\left(\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}\right)=0$$

$$\frac{x+6-6x+6}{(x-1)(x+6)}+\frac{2x-6+3x-6}{(x-2)(x-3)}=0$$

$$\frac{-5x+12}{(x-1)(x+6)}+\frac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=0$$

$$(5x-12)\left(\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{(x-1)(x+6)}\right)=0$$

$5x-12=0$ или $\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(x-1)(x+6)}$

$(x-2)(x-3)=(x-1)(x+6)$

$5x=12$ $\qquad$ $x^2-5x+6=x^2+5x-6$

$\underline{x=2,4}$ $\qquad$ $10x=12$

$\underline{x=1,2}$

ОДЗ: $x\neq 2\quad x\neq 1$
$\quad x\neq 3\quad x\neq -6$

Ответ: 1,2 и 2,4.

№5.

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21$$

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21 \quad (x\neq -2)$$

$$x^2+2x\cdot\frac{2x}{x+2}-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=21$$

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$\left(\frac{x^2+2x-2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-21=0$$

$$t=\frac{x^2}{x+2}$$

$$t^2+4t-21=0$$

$t_1=-7$ $\qquad$ $t_2=3$

$\frac{x^2}{x+2}=-7$ $\qquad$ $\frac{x^2}{x+2}=3$

$x^2+7x+14=0$ $\qquad$ $x^2-3x-6=0$

$D=49-56<0$ $\qquad$ $D=9+24=33$

$\varnothing$ $\qquad$ $x=\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$.

№6.

$$\frac{20x}{x^2+3x+10}+1=\frac{20x}{x^2+2x+10}$$

$$\frac{20x:x}{(x^2+3x+10):x}+1=\frac{20x:x}{(x^2+2x+10):x}$$

$x=0$ не является корнем данного уравнения

$$\frac{20}{x+3+\frac{10}{x}}+1=\frac{20}{x+2+\frac{10}{x}}$$

Пусть $x+2+\frac{10}{x}=t$

$$\frac{20}{t+1}+1=\frac{20}{t}\Bigg|\cdot t(t+1)$$

$$20t+t(t+1)=20(t+1)$$

$$t^2+t-20=0$$

$t_1=-5$ $\qquad$ $t_2=4$

$x+2+\frac{10}{x}=-5$ $\qquad$ $x^2+2+\frac{10}{x}=4$

$x^2+7x+10=0$ $\qquad$ $x^2-2x+10=0$

$x_1=-5$ $\qquad$ $D<0$

$x_2=-2$ $\qquad$ $\varnothing$

Ответ: -5 и -2.

Вариант 1

Решите уравнения:

№1. $\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{9x^3-4x}+\frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$

№2. $1+\left(3+\left(2+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+4}{7x+3}$

№3. $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=0$

№4. $x^2+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$

Вариант 2

Решите уравнения:

№1. $\frac{4x}{x^2+4x-1}+\frac{2x}{x^2+2x-1}=2$

№2. $\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}$

№3. $6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}+5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2}=11\frac{x^2-16}{x^2-9}$

Вариант 3

Решите уравнения:

№1. $\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$

№2. $\frac{x(x+1)}{\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}}=\frac{6}{\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}}$

№3. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$

№4. $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$

Вариант 4

Решите уравнения:

№1. $\frac{4x}{x^2-4x+1}+\frac{3x}{x^2+x+1}=-1$

№2. $-\frac{10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}$

№3. $\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2}+14\frac{x^2-1}{x^2-9}=15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$

▪ *Ответы (тест)* 3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

	№1	№2	№3	№4
Вар.1	*1*	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{7}\right)\cup\left(-\frac{3}{7};0\right)\cup(0;\infty)$	*5,5 и* $\frac{11+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3\pm\sqrt{45}}{2}$
Вар.2	$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$	*-12; 0; 1*	
Вар.3	*-3 и 10/3*	*-3*	*3,5 и* $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$	*-6 и 2*
Вар.4	*1 и* $-3\pm2\sqrt{2}$	$\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$; $-2\pm\sqrt{10}$	*0; 1,5; 2*	

▪ *Решение (тест)* 3. Методы решения дробно-рациональных уравнений

Вариант 1

№1.

$$\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{9x^3-4x}+\frac{3x}{27x^3-18x^2-12x+8}$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}=\frac{x+1}{x(9x^2-4)}+\frac{3x}{9x^2(3x-2)-4(3x-2)}$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}-\frac{x+1}{x(3x-2)(3x+2)}-\frac{3x}{(3x-2)(9x^2-4)}=0$$

$$\frac{1}{(3x-2)^2}-\frac{x+1}{x(3x-2)(3x+2)}-\frac{3x}{(3x-2)^2(3x+2)}=0$$

$$\frac{x(3x+2)-(x+1)(3x-2)-3x^2}{x(3x-2)^2(3x+2)}=0$$

ОДЗ: $x\neq0,\ x\neq\frac{2}{3},\ x\neq-\frac{2}{3}$

$3x^2+2x-3x^2+2x-3x+2-3x^2=0$

$-3x^2+x+2=0,\ \ 3x^2-x-2=0$

$$D=1+24=25,\ \ x=\frac{1\pm5}{6}=\left|\begin{array}{l}1\in\text{ОДЗ}\\ -\frac{2}{3}\notin\text{ОДЗ}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \underline{x=1}$$

№2.

$$1+\left(3+\left(2+x^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\frac{9x+4}{7x+3}$$

1) $2+x^{-1}=2+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x},x\neq0$

2) $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-1}=\frac{x}{2x+1},\ \ 2x+1\neq0,\ x\neq-\frac{1}{2}$

3) $3+\frac{x}{2x+1}=\frac{6x+3+x}{2x+1}=\frac{7x+3}{2x+1}$

4) $\left(\frac{7x+3}{2x+1}\right)^{-1}=\frac{2x+1}{7x+3},\ \ 7x+3\neq0,\ x\neq-\frac{3}{7}$

5) $1+\frac{2x+1}{7x+3}=\frac{7x+3+2x+1}{7x+3}=\frac{9x+4}{7x+3}$

$\frac{9x+4}{7x+3}=\frac{9x+4}{7x+3},\ \ x\in R$

С учетом ОДЗ $x\neq0,\ x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq-\frac{3}{7}$

Имеем $\underline{x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{7}\right)\cup\left(-\frac{3}{7};0\right)\cup(0;\infty)}$

№3.

$$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}\right)+\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}\right)=0$$

$$\frac{x-4+x-7}{(x-7)(x-4)}+\frac{x-6+x-5}{(x-5)(x-6)}=0$$

$$\frac{2x-11}{(x-7)(x-4)}+\frac{2x-11}{(x-5)(x-6)}=0$$

ОДЗ: $x\neq 7,\ x\neq 4,\ x\neq 5,\ x\neq 6$

$$(2x-11)(x-5)(x-6)+(2x-11)(x-7)(x-4)=0$$

$$(2x-11)\left(x^2-11x+30+x^2-11x+28\right)=0$$

$2x-11=0$

$x=5{,}5\in$ ОДЗ

или

$2x^2-22x+58=0 \,|\, :2$

$x^2-11x+29=0$

$D=121-116=5$

$x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}\in$ ОДЗ

Ответ: $5{,}5$ и $\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}$

№4.

$$x^2+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$$

$$x^2+2x\cdot\frac{3x}{x+3}-2x\cdot\frac{3x}{x+3}+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27$$

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$$\left(\frac{x^2+3x-3x}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

$t=\dfrac{x^2}{x+3}$

$t^2+6t-27=0$

$t_1=-9$

$\dfrac{x^2}{x+3}=-9$

$x^2+9x+27=0$

$D=81-108<0$

$x\in\varnothing$

$t_2=3$

$\dfrac{x^2}{x+3}=3$

$x^2-3x-9=0$

$D=9+36=45$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{45}}{2}\in$ ОДЗ

Ответ: $\dfrac{3\pm\sqrt{45}}{2}$

Вариант 2

№1.

$$\frac{4x}{x^2+4x-1}+\frac{2x}{x^2+2x-1}=2$$

$$\frac{4x:x}{\left(x^2+4x-1\right):x}+\frac{2x:x}{\left(x^2+2x-1\right):x}=2$$

($x=0$ не является корнем данного уравнения)

$$\frac{4}{x+4-\frac{1}{x}}+\frac{2}{x+2-\frac{1}{x}}=2$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}+2$

$$\frac{4}{t+2}+\frac{2}{t}-2=0\Big|\cdot t(t+2)\neq 0,\quad \begin{matrix} t\neq 0 \\ t\neq -2\end{matrix}$$

$4t+2(t+2)-2t(t+2)=0$

$4t+2t+4-2t^2-4t=0$

$-2t^2+2t+4=0$

$t^2-t-2=0$

$t_1=2\in$ ОДЗ

$x+\frac{1}{x}+2=2$

$x^2+1=0$

$\varnothing$

или

$t_2=-1\in$ ОДЗ

$x+\frac{1}{x}+2=-1$

$x+\frac{1}{x}+3=0$

$x^2+3x+1=0$

$D=9-4=5$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

№2.

$$\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}$$

$$\frac{8}{x^2+x+3}+\frac{10}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{x}\Big|\cdot x$$

$(x\neq 0)$

$$\frac{8x}{x^2+x+3}+\frac{10x}{x^2-5x+3}=-3$$

$$\frac{8x:x}{\left(x^2+x+3\right):x}+\frac{10x:x}{\left(x^2-5x+3\right):x}=-3$$

$$\frac{8}{x+1+\frac{3}{x}}+\frac{10}{x-5+\frac{3}{x}}=-3$$

$t=x+\frac{3}{x}$

$$\frac{8}{t+1}+\frac{10}{t-5}+3=0\Big|\cdot(t-1)(t-5)\neq 0,\quad \begin{matrix} t\neq -1 \\ t\neq 5\end{matrix}$$

$8(t-5)+10(t+1)+3(t+1)(t-5)=0$

$8t-40+10t+10+3t^2-12t-15=0$

$3t^2+6t-45=0\Big|:3$

$t^2+2t-15=0$

$t_1=-5\in$ ОДЗ

$x+\frac{3}{x}=-5$

$x^2+5x+3=0$

$D=25-12=13$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

$t_2=3\in$ ОДЗ

$x+\frac{3}{x}=3$

$x^2-3x+3=0$

$D=9-12<0$

$\varnothing$

Ответ: $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

№3.

$$6\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}+5\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2}=11\frac{x^2-16}{x^2-9}$$

$6\cdot\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2-11\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)}+5\cdot\left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2=0$ ОДЗ: $x\neq-3,\ x\neq 3.$

Пусть $\frac{x+4}{x+3}=a,\ \frac{x-4}{x-3}=b,$ тогда $6a^2-11ab+5b^2=0.$

Однородное уравнение второй степени.

$x=-4$ и $x=4$ не являются корнями данного уравнения.

$6\cdot\frac{a^2}{b^2}-11\frac{a}{b}+5=0,\quad \frac{a}{b}=t,\quad 6t^2-11t+5=0,\quad t=1$ и $t=\frac{5}{6}$

$\frac{a}{b}=1$ или $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$

$a=b\ (1)$ $\qquad 6a=5b\ (2)$

$(1)\ \frac{x+4}{x+3}=\frac{x-4}{x-3}$

$(x+4)(x-3)=(x+3)(x-4)$

$x^2+x-12=x^2-x-12$

$x+x=0$

$\underline{x=0}\in$ ОДЗ

$(2)\ \frac{6\cdot(x+4)}{x+3}=\frac{5(x-4)}{x-3}$

$6(x+4)(x-3)=5(x-4)(x+3)$

$6(x^2+x-12)=5(x^2-x-12)$

$6x^2+6x-72-5x^2+5x+60=0$

$x^2+11x-12=0$

$x_1=-12\in$ ОДЗ $\quad x_2=1\in$ ОДЗ

Ответ: $-12;\ 0;\ 1$

Вариант 3

№1.

$$\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-4x^2-16x+64}$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}=\frac{10}{x^2(x-4)-16(x-4)}$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}-\frac{10}{(x-4)(x^2-16)}=0$$

$$\frac{4}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)^2}-\frac{10}{(x-4)^4(x+4)}=0$$

$$\frac{4(x+4)(x-4)-(x-4)^2-10(x+4)}{(x-4)^2(x+4)^2}=0$$

$$\begin{cases}4x^2-64-x^2+8x-16-10x-40=0\\ x\neq 4,\ x\neq -4\end{cases}$$

$$3x^2-2x-120=0,\quad D/4=1+360=361$$

$$x=\frac{1\pm 19}{6}=\left|\begin{array}{l}\frac{10}{3}\in \text{ОДЗ}\\ -3\in \text{ОДЗ}\end{array}\right.\Leftrightarrow \underline{x=\left\{-3;\frac{10}{3}\right\}}$$

№2.

$$\frac{x(x+1)}{\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}}=\frac{6}{\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}}$$

$$\frac{2}{x-6}+\frac{1}{4-x}=\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-4}=$$

$$=\frac{2x-8-x+6}{(x-6)(x-4)}=\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}$$

$$\frac{x(x+1)}{\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}}=\frac{6}{\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}}$$

ОДЗ: $\frac{x-2}{(x-6)(x-4)}\neq 0$

$x\neq 2,\ x\neq 6,\ x\neq 4$

$x^2+x-6=0$

$x_1=-3\in$ ОДЗ

$x_2=2\notin$ ОДЗ

<u>Ответ: -3</u>

№3.

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

$$\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}\right)+\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}\right)=0$$

$$\frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}+\frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)}=0$$

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x-5)}+\frac{2x-7}{(x-3)(x-4)}=0$$

ОДЗ: $x\neq 2,\ x\neq 5,\ x\neq 3,\ x\neq 4$

$$(2x-7)(x-3)(x-4)+(2x-7)(x-2)(x-5)=0$$

$$(2x-7)(x^2-7x+12+x^2-7x+10)=0$$

$2x-7=0$, $x=3{,}5\in$ ОДЗ

или

$2x^2-14x+22=0$

$x^2-7x+11=0$

$D=49-44=5$

$x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}\in$ ОДЗ

<u>Ответ: 3,5 и $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$</u>

№4.

$$x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$$

$$x^2+2x\cdot\frac{3x}{x-3}-2x\cdot\frac{3x}{x-3}+\left(\frac{3x}{x-3}\right)^2=40\quad (x\neq 3)$$

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$$\left(\frac{x^2-3x+3x}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\cdot\frac{x^2}{x-3}-40=0$$

$t=\frac{x^2}{x-3},\quad t^2-6t-40=0$

$t_1=10$ | $t_2=-4$

$\frac{x^2}{x-3}=10$

$x^2-10x+30=0$

$D/4=25-30<0$

$x\in\varnothing$

$\frac{x^2}{x-3}=-4$

$x^2+4x-12=0$

$x_1=-6\in$ ОДЗ

$x_2=2\in$ ОДЗ

<u>Ответ: -6 и 2</u>

Вариант 4

№1.

$$\frac{4x}{x^2-4x+1}+\frac{3x}{x^2+x+1}=-1$$

$$\frac{4x:x}{(x^2-4x+1):x}+\frac{3x:x}{(x^2+x+1):x}=-1$$

$(x=0$ не является корнем данного уравнения$)$

$$\frac{4}{x-4+\frac{1}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{1}{x}}=-1$$

$$t=x+\frac{1}{x}$$

$$\frac{4}{t-4}+\frac{3}{t+1}+1=0\Bigg|\cdot(t-4)(t+1),\ \begin{matrix}t\neq 4\\ t\neq -1\end{matrix}$$

$$4(t+1)+3(t-4)+(t-4)(t+1)=0$$

$$4t+4+3t-12+t^2-3t-4=0$$

$$t^2+4t-12=0$$

$t_1=-6$ $\qquad$ $t_2=2$

$x+\frac{1}{x}=-6$ $\qquad$ $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2+6x+1=0$ $\qquad$ $x^2-2x+1=0$

$D/4=9-1=8$ $\qquad$ $(x-1)^2=0$

$x=-3\pm 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $x=1$

Ответ: 1 и $-3\pm 2\sqrt{2}$

№2.

$$-\frac{10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{-10}{x^2-x-6}+\frac{9}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x}\Bigg|\cdot x\neq 0$$

$$\frac{-10x}{x^2-x-6}+\frac{9x}{x^2-5x-6}=1$$

$$\frac{-10x:x}{(x^2-x-6):x}+\frac{9x:x}{(x^2-5x-6):x}=1$$

$$\frac{-10}{x-1-\frac{6}{x}}+\frac{9}{x-5-\frac{6}{x}}=1$$

$$t=x-\frac{6}{x}$$

$$\frac{-10}{t-1}+\frac{9}{t-5}=1\Bigg|\cdot(t-1)(t-5),\ \begin{matrix}t\neq 1\\ t\neq 5\end{matrix}$$

$$-10(t-5)+9(t-1)-(t-1)(t-5)=0$$

$$-10t+50+9t-9-t^2+6t-5=0$$

$$-t^2+5t+36=0$$

$$t^2-5t-36=0$$

$t_1=9$ $\qquad$ $t_2=-4$

$x-\frac{6}{x}=9$ $\qquad$ $x-\frac{6}{x}=-4$

$x^2-9x-6=0$ $\qquad$ $x^2+4x-6=0$

$D=81+24=105$ $\qquad$ $D/4=4+6=10$

$x=\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$ $\qquad$ $x=-2\pm\sqrt{10}$

Ответ: $\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$; $-2\pm\sqrt{10}$

№3.

$$\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2}+14\frac{x^2-1}{x^2-9}=15\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}$$

$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2+14\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}-15\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2=0$ ОДЗ: $x\neq 3,\ x\neq -3$

Пусть $a=\frac{x+1}{x-3},\ b=\frac{x-1}{x+3},\quad a^2+14ab-15b^2=0\,\big|:b^2$

$x=-1$ и $x=1$ корнями данного уравнения не являются.

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+14\frac{a}{b}-15=0,\quad t=\frac{a}{b}$

$t^2+14t-15=0$

$t_1=-15 \qquad t_2=1$

$\frac{a}{b}=-15 \qquad \frac{a}{b}=1$

$(1)\ a=-15b \quad (2)\ a=b$

$(1)\ \frac{x+1}{x-3}=-15\cdot\frac{x-1}{x+3}$

$(x+1)(x+3)=-15(x-1)(x-3)$

$x^2+4x+3=-15x^2+60x-45$

$16x^2-56x+48=0$

$2x^2-7x+6=0,\quad D=49-48=1,\quad x=\frac{7\pm1}{4}=\left|\begin{array}{l}2\in\text{ОДЗ}\\1{,}5\in\text{ОДЗ}\end{array}\right.$

$(2)\ \frac{x+1}{x-3}=\frac{x-1}{x+3}$

$(x+1)(x+3)=(x-1)(x-3)$

$x^2+4x+3=x^2-4x+3$

$8x=0$

$x=0\in\text{ОДЗ}$

Ответ: 0; 1,5; 2